Département MIDO, première année

Analyse 1

Fondements de l'analyse réelle

Rédigé par Alexandre Afgoustidis et remanié par Pierre Cardaliaguet et Benjamin Melinand

(version du 7 janvier 2020)

Rédigé par Alexandre Afgoustidis et remanié par Pierre Cardaliaguet et Benjamin Melinand
CEREMADE, Université Paris-Dauphine, 75016 Paris, France.
E-mail : `cardaliaguet@ceremade.dauphine.fr` , `melinand@ceremade.dauphine.fr`

Ce polycopié a été créé avec LaTeX; pour la mise en forme, nous avons adapté des fichiers de style fournis par la Société Mathématique de France, notamment la classe `smfbook`.

ANALYSE 1

Rédigé par Alexandre Afgoustidis et remanié par Pierre Cardaliaguet et Benjamin Melinand

TABLE DES MATIÈRES

AVANT DE COMMENCER

À propos de ce document. — Le présent polycopié est issu d'un support de cours distribué entre septembre et décembre 2017. Il doit beaucoup

- au document utilisé entre 2013 et 2016, qui avait été rédigé par François Simenhaus,
- aux étudiants des promotions 2015, 2016 et 2017 et 2018 qui m'ont subi en cours,
- à Olivier Glass, co-responsable du cours pour 2017-2018,
- à Irène Waldspurger, dont la relecture a permis de corriger de très nombreuses erreurs et fautes de frappe,
- à la vigilance des étudiants et des collègues qui en ont repéré beaucoup d'autres,
- aux discussions avec les collègues avec qui j'ai partagé ce cours :
  Amine Bey, Raphaël Butez, Jorge Clarke, Olivier Glass et Irène Waldspurger (en 2017-2018),
  Anne-Marie Boussion, Jean Louet, Jessica Massetti et François Simenhaus (en 2015-2016 et 2016-2017).

Il reste sans aucun doute beaucoup d'erreurs et de coquilles ; j'en suis seul responsable. N'hésitez pas à me les signaler.

Un conseil pour votre travail. — Pour bien s'approprier le cours,

- D'une part, il est essentiel d'avoir compris les définitions et les résultats (propositions, théorèmes) du cours, de les *connaître* avec précision, et d'avoir *étudié les exemples du cours* sans lesquels les notions paraîtront inévitablement très abstraites,
- D'autre part, il est utile de faire *soi-même* des exercices variés, pour tester sa compréhension du cours et pour s'entraîner à développer sa réflexion autour (et à l'aide) des notions nouvellement étudiées.

Deux écueils sont à éviter. D'une part, il n'est pas nécessairement souhaitable de faire *énormément* d'exercices au détriment de l'étude approfondie du cours. Souvenez-vous que le cours n'est *pas* un prétexte pour faire des exercices et passer des examens : au contraire, ce sont les exercices qui sont faits pour tester et améliorer votre compréhension du cours. D'autre part, il est probablement nuisible de se contenter de lire les corrections d'exercices que l'on n'a pas cherché soi-même : l'impression, en lisant et en comprenant le corrigé, qu'on « aurait su faire l'exercice » est en général mauvaise conseillère.

CHAPITRE 1

NOMBRES RÉELS

1. L'ensemble $\mathbb{R}$

Entiers, rationnels. — Vous êtes habitués à l'ensemble

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

des entiers naturels, et aux manipulations qu'il permet : additionner, multiplier, comparer deux entiers naturels ; mener un raisonnement par récurrence...

Vous connaissez aussi l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, ...\}$$

obtenu en ajoutant un opposé pour chaque entier non nul ; vous savez qu'on peut, dans $\mathbb{Z}$, comparer, additionner, multiplier *et soustraire* deux éléments.

On peut rappeler que l'idée de « nombre négatif » n'a pas été acceptée sans mal [(1)] et que les « règles » que vous avez l'habitude d'utiliser dans $\mathbb{Z}$ (« moins par moins donne plus », $-18 < 2$) sont *adoptées* parce qu'elles permettent à la multiplication, l'addition et la comparaison de $\mathbb{Z}$ d'être « aussi faciles à manier » que celles de $\mathbb{N}$, mais qui ne peuvent pas se *déduire* des propriétés de $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est ainsi *construit à partir de* $\mathbb{N}$; l'addition, la multiplication et la comparaison sont *définies* à partir de celles de $\mathbb{N}$ et des « règles » habituelles.

À partir de $\mathbb{Z}$, on peut de même *construire* l'ensemble

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^\star \right\}$$

des *nombres rationnels*, avec ses opérations (addition, multiplication, mais aussi soustraction *et* division), sa notion de comparaison, sa notion de *fraction irréductible*, etc.

Nous ne reviendrons pas sur ces constructions ni sur les propriétés de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

Sur les nombres irrationnels. — La notion de nombre permet de *compter* ; c'est le cas bien sûr pour les entiers naturels, pour les entiers relatifs (qui peuvent « compter des dettes »), pour les rationnels (qui permettent de former des « parts égales » d'une même quantité).

Depuis longtemps, elle est également utilisée pour *mesurer des longueurs*. Vous avez l'habitude d'attacher à chaque *segment de droite* une longueur et de considérer que cette longueur *est* un nombre ; il est alors naturel d'additionner des longueurs, de les multiplier (pour obtenir des aires), etc.

On peut alors s'appuyer sur les théorèmes de la géométrie pour *calculer* certaines longueurs, sans les mesurer directement. Dans ce contexte, le théorème de Pythagore a une conséquence célèbre : la longueur de la diagonale d'un carré dont les côtés ont pour longueur un mètre, exprimée en mètres, doit être donnée par un « nombre » dont le carré vaut $1^2 + 1^2 = 2$.

Théorème 1.1 – Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Il n'existe pas de rationnel dont le carré soit égal à 2.

---

1. En Europe, Descartes parle de « quantités fausses » en 1637 pour désigner les solutions négatives d'une équation.

Démonstration. — Nous allons raisonner par l'absurde.
Supposons qu'il existe un nombre rationnel α vérifiant $\alpha^2 = 2$. On sait qu'il existe deux nombres entiers p et q vérifiant :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{p}{q}; \\ p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^\star; \\ \mathbf{PGCD}(p, q) = 1. \end{cases}$$

(les entiers p et q fournissent l'*écriture de α sous forme de fraction irréductible* et sont entièrement déterminés par α).
Mais alors α^2 vaut $\frac{p^2}{q^2}$, et par hypothèse on a $\alpha^2 = 2$, donc $p^2 = 2 \cdot q^2$.
L'entier p^2 est donc pair, et cela ne peut arriver que si p est pair. On peut donc écrire $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
et alors $2 \cdot q^2 = p^2 = 4 \cdot k^2$, donc $q^2 = 2 \cdot k^2$, si bien que q^2 est pair, et cela ne peut arriver que si q est lui-même pair.
Nous constatons donc que p et q doivent être tous deux pairs, c'est-à-dire divisibles par 2 ;
or nous sommes partis d'un couple (p, q) vérifiant $\mathbf{PGCD}(p, q) = 1$, on aboutit donc à une contradiction. □

Exercice 1.1. —

1. Montrer qu'il n'existe pas de rationnel dont le carré soit le nombre 3.
2. Montrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel ρ vérifiant : $2^\rho = 3$.

Le théorème ci-dessus a été découvert au moins cinq siècles avant notre ère ; on l'attribue en général aux pythagoriciens.

Il y a au moins deux réactions possibles à ce fait :

1. Considérer que le mot « nombre » doit être réservé aux rationnels et séparer tout ce qui se rapporte à la notion de longueur en géométrie de ce qui se rapporte à l'arithmétique (« science des nombres ») ;
2. étendre la signification donnée au mot « nombre » pour que ce mot puisse désigner la longueur de « tout » segment de droite.

La première réaction n'est pas absurde : elle fut longtemps [(2)] dominante.
De la deuxième réaction est issue la notion de *nombre réel* à laquelle vous êtes habitués.
Est-il facile de dire exactement ce qu'est un nombre réel ?

1.1. Nombres « réels » et développements décimaux. — Dans ce cours, nous partirons de l'usage courant d'écrire les nombres sous forme de « suite de chiffres ».

Définition 1.2 – Développement décimal

Un *développement décimal* est la donnée
- d'un signe (+ ou −),
- d'un entier naturel,
- d'une suite (infinie) de chiffres entre 0 et 9 : pour chaque n de $\mathbb{N}^\star$, on donne un entier c_n de $\{0, .., 9\}$.

Même sans disposer d'une définition formelle des « nombres réels », vous avez l'habitude du fait qu'un développement décimal définit un (et un seul) « nombre réel » : par exemple, pour décrire le nombre rationnel $\frac{1}{3}$, vous avez l'habitude d'utiliser le développement décimal donné par le signe +, l'entier 0 et la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ ne comportant que le chiffre 3 ; cela donne lieu à l'écriture usuelle

$$\frac{1}{3} = +0.3333333333333333... .$$

On peut donc espérer s'appuyer sur la notion de développement décimal pour « définir » les nombres réels.

2. L'idée de traiter les « quantités irrationnelles » comme des nombres semble apparaître à la fin du premier millénaire dans le monde musulman ; l'expression « nombre réel » semble remonter à Descartes.

Il est important de noter que dans certains cas, deux développements décimaux différents doivent pouvoir décrire le même nombre : l'exemple le plus important est

$$1 = 0.99999999999...$$

(la ligne ci-dessus est une *égalité rigoureuse*[(3)]). De même,

$$17.2499999999999... = 17.25.$$

Certains nombres doivent pouvoir admettre deux développements décimaux différents : l'un se terminant par une suite ininterrompue de 0, l'autre se terminant par une suite ininterrompue de 9. Ces nombres sont ceux qui « peuvent être écrits avec un nombre fini de chiffres après la virgule », les *nombres décimaux*[(4)].

Pour résumer, l'usage courant est de manier les développements décimaux de la manière suivante :

- Si x est un nombre décimal, alors il correspond à deux développements décimaux différents : l'un se finit par une suite ininterrompue de 9, l'autre non.
- Si x est un nombre qui n'est pas décimal, alors il correspond à un seul développement décimal. Ce développement ne peut pas se terminer par une suite ininterrompue de 9, sinon x serait décimal.

Donnons maintenant un nom aux développements décimaux qui ne se terminent pas par une suite ininterrompue de 9. Dire que la suite (c_n) ne comporte que des 9 à partir d'un certain rang s'écrit avec des quantificateurs :

$$\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies c_n = 9)\,.$$

En prenant la négation, on aboutit à la définition suivante.

Définition 1.3 – Développement décimal propre

Un développement décimal **propre** est la donnée
- d'un signe ($+$ ou $-$),
- d'un entier naturel,
- d'une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de chiffres entre 0 et 9 qui vérifie : $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \ (n \geq N \quad et \quad c_n \neq 9)$.

On peut être tenté de *définir* un réel x comme la donnée de son développement décimal propre :

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des développements décimaux propres.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est dans ce cas défini sans ambigüité, même si c'est de manière abstraite, à partir de l'ensemble $\mathbb{N}$. Ce n'est ni la seule manière possible de définir la notion de nombre réel, ni la meilleure[(5)] .

Un avantage de cette construction est de reposer sur l'habitude que nous avons prise, dans notre vie quotidienne, de la notion de développement décimal. L'un de ses inconvénients, comme nous allons le voir, est de ne pas permettre de définir simplement l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$.

---

3. Voici une démonstration de cette égalité : notons $x = 0.9999999...$; alors $10x = 9.999999...$, donc $10x = 9 + x$, d'où on tire $x = 1$.

4. Dire qu'un nombre x admet un développement décimal comportant au plus N chiffres après la virgule, c'est dire que $10^N x$ est entier : ainsi un nombre x est décimal si et seulement s'il existe un couple (k, N) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ vérifiant : $x = \frac{k}{10^N}$.Les nombres décimaux sont donc tous rationnels. Attention, l'exemple du nombre $\frac{1}{3} = +0.3333333333333333...$ montre qu'il est loin d'être vrai que tout nombre rationnel soit décimal.

5. D'autres constructions, plus abstraites, sont possibles et donnent un résultat « identique » (en un sens que nous ne préciserons pas ici). On pourra chercher des renseignements sur la notion de « coupure de Dedekind ».

1.2. Addition, multiplication. — Une fois qu'un réel est identifié à un développement décimal propre, il est tentant de penser que les manipulations que vous avez apprises à l'école permettent de définir les opérations habituelles d'addition et de multiplication : il suffirait de dire, pour chaque x de $\mathbb{R}$ et chaque y de $\mathbb{R}$, comment obtenir les développements décimaux de $x+y$ et xy à partir des développements décimaux (propres) de x et de y.

Mais à l'école élémentaire, vous avez appris à additionner ou multiplier uniquement des nombres *décimaux*, avec un nombre fini de chiffres non nuls. La procédure standard comporte des *retenues* et nécessite de « commencer par les chiffres de droite » : par exemple, pour calculer $0.1234 + 0.5678$ et trouver 0.6912, vous avez l'habitude de commencer par les dernières décimales et de pratiquer des retenues, qui peuvent se propager plus ou moins longtemps dans le calcul (par exemple, que se passe-t-il si on calcule $0.454545 + 0.555555$?).

Hélas, c'est trop espérer que de vouloir étendre ces manipulations au cas de développements décimaux infinis :
- il n'y a pas de « chiffre de droite » pour des développements décimaux infinis ;
- chercher à écrire des procédures alternatives commençant par les « chiffres de gauche » forcerait à des considérations sophistiquées sur la propagation des retenues ;
- même si on parvenait à écrire une définition tenant compte de toutes les complications possibles de l'addition et de la multiplication, on voit mal comment il serait possible de *démontrer* les propriétés à partir desquelles vous avez l'habitude de manipuler les nombres réels au quotidien : on est en droit de frissonner à l'idée d'écrire une preuve basée uniquement sur les développements décimaux du fait que $\pi\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = \pi\sqrt{2} + \pi\sqrt{3}$.

Nous *admettrons* donc qu'il est possible de définir sur $\mathbb{R}$ deux opérations $+$ et $\times$ qui *étendent* les opérations sur les nombres rationnels et qui ont de plus les propriétés algébriques nécessaires [6] aux manipulations habituelles :

I.1. Pour tous réels x, y, z , $(x+y)+z = x+(y+z)$ (associativité de $+$)

I.2. Pour tous réels x, y, $x+y = y+x$ (commutativité de $+$)

I.3. Il existe un élément 0 de $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ x+0 = 0+x = x$ (existence d'un élément neutre pour $+$)

I.4. Pour tout x de $\mathbb{R}$, il existe un y de $\mathbb{R}$ vérifiant $x+y=0$. (existence d'un opposé pour chaque élément)

I.5. Pour tous réels x, y, z , $(xy)z = x(yz)$ (associativité de $\times$)

I.6. Pour tous réels x, y, $xy = yx$ (commutativité de $\times$)

I.7. Il existe un élément 1 de $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ x1 = 1x = x$ (existence d'un élément neutre pour $\times$)

I.8. Pour tout x non nul, il existe un y vérifiant $xy = 1$ (existence d'un inverse pour chaque élément non nul)

I.9. Pour tous réels x, y, z , $(x+y)z = xz + yz$ (distributivité de $\times$ sur $+$)

On résume souvent le fait qu'il existe sur $\mathbb{R}$ deux opérations ayant les propriétés **I.1.** à **I.9.** par l'expression « $\mathbb{R}$ est un corps ».

Vous connaissez d'autres corps : par exemple, vous savez qu'il est utile de travailler avec l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres *complexes*, et vous savez qu'on peut définir sur $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication [7] ; dire que « $\mathbb{C}$ est un corps » est une manière abrégée de dire que l'addition et la multiplication des nombres complexes vérifient les propriétés **I.1.** à **I.9.**.

1.3. L'ordre usuel sur $\mathbb{R}$. — La notion d'ordre sur $\mathbb{R}$ est bien plus facile à définir à partir de la notion de développement décimal propre que l'addition et la multiplication. Nous n'allons pas donner de définition formelle [8], mais il s'agit de l'ordre « lexicographique » auquel l'ordre alphabétique vous a habitués. Par exemple,

6. Depuis la fin du $XIX^{\text{ème}}$ Siècle, on sait que
- on peut démontrer, à partir de ces neuf propriétés, que toutes les « manipulations habituelles » fonctionnent sans surprise ;
- les propriétés I.1 à I.9 sont « logiquement indépendantes » : aucune d'entre elles n'est une conséquence des autres.

7. Pour rappel, si z et z' sont deux nombres complexes et si $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ avec x, x', y, y' réels, alors $z+z'$ est défini comme le nombre complexe $(x+x')+i(y+y')$, tandis que zz' est défini comme $(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$.

8. Ou plutôt nous allons la donner en note de bas de page : partant de deux réels x et y, on observe leurs développements décimaux propres :
- si les signes ne sont pas identiques c'est le nombre positif qui est le plus grand des deux ;

pour constater que $05.6344 \leq 19.323$ il suffit de comparer les « chiffres de gauche », mais pour constater que $05.6344 \leq 05.6709$ il faut aller chercher les « deuxièmes chiffres après la virgule ». Voici une liste de propriétés importantes de la relation $\leq$:

II.1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $x \leq x$ (réflexivité de $\leq$)

II.2. Pour tous x, y, z de $\mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$ (transitivité de $\leq$)

II.3. Pour tous x, y de $\mathbb{R}$, si ($x \leq y$ et $y \leq x$), alors $x = y$ (antisymétrie de $\leq$)

II.4. Pour tous x, y de $\mathbb{R}$, on a soit $x \leq y$, soit $y \leq x$. (l'ordre $\leq$ est *total*)

II.5. Pour tous x, y de $\mathbb{R}$, si $x \leq y$, alors $(\forall a \in \mathbb{R},\ x + a \leq y + a)$ (compatibilité de $\leq$ avec $+$)

II.6. Pour tous x, y de $\mathbb{R}$, si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \geq 0$ (compatibilité de $\leq$ avec $\times$)

(il n'est pas difficile d'observer les propriétés **II.1** à **II.4** à partir de la définition de l'ordre lexicographique ; en revanche, **II.5** et **II.6** ne peuvent pas être immédiates à ce stade, puisque nous avons passé sous silence la construction de $+$ et $\times$).

Les propriétés **II.1** à **II.3** sont souvent résumées par l'expression : « $\leq$ est une relation d'ordre » et pour résumer toutes les propriétés (**I.1-I.9**) + (**II.1-II.6**), on utilise souvent l'expression : « $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné ».

Voici deux exemples de conséquences importantes en pratique de **II.1** à **II.5** :

II.A. Si a est un réel *strictement positif* et si b et c sont des réels vérifiant $b < c$, alors $ab < ac$,
Si a est un réel *strictement négatif* et si b et c sont des réels vérifiant $b < c$, alors $ab > ac$.
$\rightsquigarrow$ *Au moment de multiplier les deux membres d'une inégalité par un réel a, attention au signe de a !*

II.B. Si a et b sont deux réels vérifiant $a < b$, alors : $a < \left(\frac{a+b}{2}\right) < b$.

Exercice 1.2. — Démontrer **II.A.** et **II.B.** à partir des propriétés **II.4.** et **II.5.**.

1.4. Deux propriétés fondamentales. — Comme nous l'avons vu, la notion de développement décimal donne une idée de ce qu'est un nombre réel, mais elle a des inconvénients majeurs pour *faire concrètement* des mathématiques :

- certains nombres « importants » (comme π, $\sqrt{2}$, $\ln(3)$, e, etc) ont un développement décimal très compliqué et en pratique, leur importance est due à des propriétés qu'il est impossible de lire sur leur développement décimal ;
- il est très pénible de démontrer quoi que ce soit de géométrique ou d'intuitif en manipulant uniquement le développement décimal, ou même de faire des opérations apparemment aussi innocentes qu'une multiplication.

Heureusement, on s'aperçoit en pratique que *toutes* les propriétés de $\mathbb{R}$ peuvent être résumées par

- l'existence (loin d'être évidente !) des opérations $+$ et $\times$ et de la relation $\leq$, avec les propriétés **(I)** et **(II)** ci-dessus,
- plus deux propriétés fondamentales qui sont plus abstraites en apparence que la notion de développement décimal, mais qui avec du travail et de l'expérience, se révèlent beaucoup plus faciles à manier.

Nous présentons maintenant ces deux propriétés fondamentales ; elles sont le socle de l'analyse.

- si x et y sont positifs, quitte à compléter par des zéros, on peut supposer qu'ils ont autant de « chiffres avant la virgule » ; on compare alors les « chiffres de gauche » ; si le « chiffre de gauche » de x est strictement plus grand que celui de y alors on décide que $x > y$; si les « chiffres de gauche » sont égaux, alors on observe les « deuxièmes chiffres en partant de la gauche » et on utilise le même critère de décision. Il n'est pas possible que *tous* les chiffres des développements décimaux propres soient égaux, à moins que x soit égal à y.
- si x et y sont négatifs, on observe $-x$ et $-y$ et on utilise la notion de comparaison des réels positifs que nous venons de définir, puis selon que $-x \geq -y$ ou $-x \leq -y$ on décide que $x \leq y$ ou $x \geq y$.

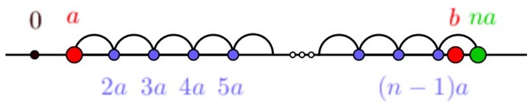
1.4.1. *La propriété d'Archimède.* —

Théorème 1.4 – La propriété d'Archimède

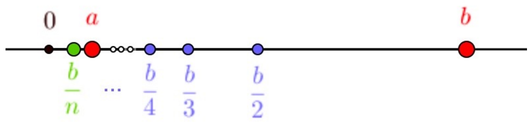
Si a et b sont deux réels strictement positifs, alors il existe un entier n de $\mathbb{N}^\star$ vérifiant : $na > b$.

On peut commenter cette propriété de deux manières :

- « Même si a est très petit et b très grand, il est possible de trouver au-delà de b un multiple de a ».



- « Même si a est très petit et b très grand, en divisant b en beaucoup de parties égales, on peut arriver dans $]0, a[$ ».



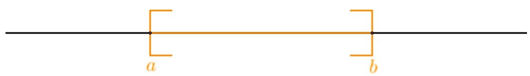
Deux cas particuliers importants. —

- Pour tout $A > 0$, il existe un entier n de $\mathbb{N}^\star$ vérifiant : $n > A$.
- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n de $\mathbb{N}^\star$ vérifiant : $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Démonstration. — Démonstration de la propriété d'Archimède à partir de la notion de développement décimal soient a et b deux nombres strictement positifs. On cherche un entier n vérifiant : $\frac{b}{n} < a$, c'est-à-dire : $n > \frac{b}{a}$. Le développement décimal propre de $\frac{b}{a}$ est de la forme $+\alpha.c_0c_1c_2c_3...$, où α est un entier naturel et où $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de chiffres entre 0 et 9 qui ne termine pas par une série de 9.
On s'aperçoit que le nombre $n = \alpha + 1$ est un élément de $\mathbb{N}^\star$ et qu'on a bien $n > \frac{b}{a}$. □

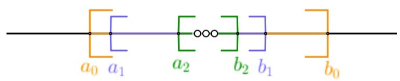
1.4.2. *La propriété des segments emboîtés.* — Commençons par introduire quelques éléments de vocabulaire.

- Un **segment de** $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$, où a et b sont deux réels vérifiant $a \leq b$.



- Une **suite de segments de** $\mathbb{R}$ est la donnée, pour chaque n de $\mathbb{N}$, d'un segment $[a_n, b_n]$ de $\mathbb{R}$.
- Une **suite de segments emboîtés** est une suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de $\mathbb{R}$ vérifiant :

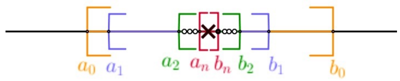
$$\forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$



Nous pouvons maintenant énoncer la propriété des segments emboîtés.

Théorème 1.5 – La propriété des segments emboîtés

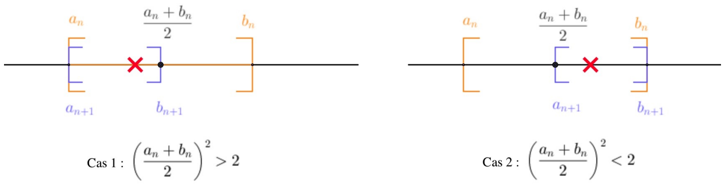
Si $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de segments emboîtés, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$ est non vide ; autrement dit, il existe un réel x vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ x \in [a_n, b_n]$.



Démontrer la propriété des segments emboîtés à partir de la notion de développement décimal est possible, mais c'est aride et long : nous ne le ferons pas dans ce cours.

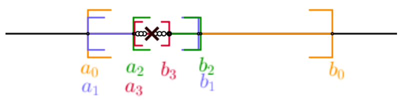
1.4.3. *Exemple d'utilisation des deux propriétés : une construction de $\sqrt{2}$ par dichotomie.* — Voyons comment les deux propriétés ci-dessus permettent de *construire* « le » nombre que nous appelons tous $\sqrt{2}$.

- On sait qu'il ne peut pas y avoir deux nombres *positifs* x et y vérifiant $x^2 = 2$, $y^2 = 2$ et $x \neq y$.
  S'il y a un nombre positif x vérifiant $x^2 = 2$, il y en a donc un seul.
- On sait que si un tel nombre x existe, on doit avoir $x \in [1, 2]$,
  puisque la fonction $u \mapsto u^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et qu'on a $1^2 < 2$ et $2^2 > 2$.
- Naturellement, dans ce cas, le nombre x appartient soit à la moitié gauche de $[1, 2]$, soit à sa moitié droite. Pour savoir à quelle moitié il appartient, on peut observer le point milieu 1.5, et se demander s'il est « plutôt à gauche » de x ou « plutôt à droite » de x. Comme $(1.5)^2 = 2.25$ est strictement supérieur à 2, on en déduit que 1.5 est « à droite » de x. Ainsi x appartient à la « moitié gauche » de l'intervalle $[1, 2]$.
- Nous constatons donc que x appartient non seulement au segment $[1, 2]$, mais aussi au segment $[1, 1.5]$. On peut alors répéter l'étape précédente et se demander s'il appartient à la moitié « gauche » ou « droite » de l'intervalle $[1, 1.5]$: pour cela, il suffit d'observer $(1.25)^2$.
- On peut souhaiter « répéter indéfiniment ce processus de découpage ». Une récurrence permet de le faire :
  — on pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$;
  — si on suppose déjà construit un segment $[a_n, b_n]$ vérifiant : $a_n^2 < 2$, $b_n^2 > 2$ et vérifiant $a_n \in \mathbb{Q}$ et $b_n \in \mathbb{Q}$, alors on observe le point-milieu $\mu_n = \frac{a_n+b_n}{2}$:



  si $\mu_n^2 > 2$ on appelle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ la « moitié gauche » de $[a_n, b_n]$, en posant $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \mu_n$;
  si $\mu_n^2 < 2$ on appelle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ la « moitié droite » de $[a_n, b_n]$, en posant $a_{n+1} = \mu_n$ et $b_{n+1} = b_n$
  (on ne peut avoir $\mu_n^2 = 2$ puisque μ_n est rationnel).

Notre récurrence définit ainsi une suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments. C'est une suite de segments emboîtés puisque pour chaque n, $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est une « moitié » de $[a_n, b_n]$. De plus, leurs longueurs sont liées par : $\forall n \in \mathbb{N},\ (b_{n+1} - a_{n+1}) = \frac{b_n - a_n}{2}$, d'où par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, (b_{n+1} - a_{n+1}) = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{1}{2^n}$.



- D'après la propriété des segments emboîtés, il existe donc un nombre x vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in [a_n, b_n]$.
- De plus, la propriété d'Archimède garantit qu'il n'y a qu'un x vérifiant cette condition : s'il y avait deux nombres *distincts* x et y, disons $x < y$, dans l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on aurait : $\forall n \in \mathbb{N}, (y - x) \leq (b_n - a_n)$ (car $y \leq b_n$ et $x \geq a_n$), donc $y - x \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ (où la dernière inégalité se prouve par récurrence). Cela contredirait la propriété d'Archimède (en effet, on sait qu'il existe au moins un n de $\mathbb{N}^\star$ vérifiant $\frac{1}{n} < y - x$, l'assertion précédente ne peut donc être vraie pour tout n). On obtient donc l'unicité recherchée.
- Vérifions que le nombre x que nous venons de construire est bien solution de $x^2 = 2$: pour chaque n de $\mathbb{N}$, on sait que x^2 appartient à $[a_n^2, b_n^2]$, et nous avons construit a_n et b_n de façon à avoir $a_n^2 < 2$ et $b_n^2 > 2$. Ainsi si $x^2 > 2$, alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, (x^2 - 2) \leq b_n^2 - a_n^2$ (car $x^2 \leq b_n^2$ et $2 > a_n^2$). Mais $(b_n^2 - a_n^2) = (b_n - a_n)(b_n + a_n) \leq \frac{1}{2^n}(b_n + b_n) \leq \frac{1}{2^n}(b_0 + b_0) = \frac{4}{2^n}$, si bien que pour tout n de $\mathbb{N}^\star$ on a $(x^2 - 2) \leq \frac{4}{n}$, ce qui est impossible compte tenu de la propriété d'Archimède (même argument que

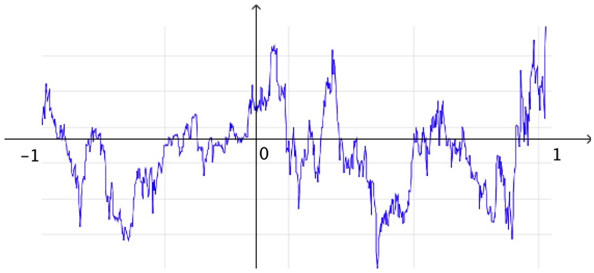
précédemment). On vérifie de même que l'inégalité $x^2 < 2$ est impossible : finalement $x^2 = 2$, comme annoncé.

2. Borne supérieure

2.1. Parties de $\mathbb{R}$. — Parmi les parties de $\mathbb{R}$, vous connaissez déjà les *intervalles*, sur lesquels nous reviendrons au numéro 1.3.

Il est important d'avoir en tête qu'une partie de $\mathbb{R}$ est en général *beaucoup plus compliquée* qu'un intervalle. Voici quelques exemples :

1. Observons l'ensemble $A = \mathbb{Q} \cap]0,1[$.
   - Il contient « beaucoup » d'éléments de $]0,1[$: par exemple, tous les nombres décimaux (avec un nombre fini, mais arbitrairement grand, de chiffres après la virgule) de $]0,1[$ sont dans A.
   - Cela dit, il est partout « criblé de trous » : si α et β sont deux éléments de A avec $\alpha < \beta$, alors on peut trouver au moins un nombre irrationnel entre α et β (en effet, tout nombre de la forme $\alpha + \frac{\sqrt{2}}{n}$, avec n entier, est irrationnel ; or d'après la propriété d'Archimède, il existe un n_0 de $\mathbb{N}^\star$ vérifiant $n_0(\beta - \alpha) > \sqrt{2}$, et alors $\alpha + \frac{\sqrt{2}}{n_0} < \beta$).
2. Soit f « la » fonction de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ dont le graphe est le suivant :



   et B l'ensemble $\{t \in [-1,1],\ f(t) \geq 0\}$. L'ensemble B est « compliqué », n'est-ce pas ? (pourtant, dans certains secteurs d'activité très prosaïques, fonctions et ensembles de ce type sont monnaie courante : le graphe est le cours de l'Euro dans la matinée du 03 août 2017).
3. Essayez de vous représenter l'ensemble C des nombres de $]0,1[$ dont le développement décimal propre ne comporte pas le chiffre 9. Vous devriez trouver que cet ensemble n'est pas facile à imaginer, même s'il est possible d'en énoncer certaines propriétés (par exemple, aucun nombre strictement supérieur à 0.88888.... n'appartient à C). Quelques recherches avec les mots-clés « ensemble de Cantor » pourront vous permettre, en utilisant la base 3 plutôt que la base 10, d'en savoir plus sur un ensemble analogue.

2.2. Partie majorée, minorée, bornée. —

Définition 1.6 – Majorant, minorant ; partie majorée, minorée, bornée

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
- Soit M un nombre réel. On dit que M est un *majorant* de A lorsque : $\forall x \in A,\ x \leq M$.
- Soit m un nombre réel. On dit que m est un *minorant* de A lorsque : $\forall x \in A,\ x \geq m$.

Définition 1.7 – Partie majorée, minorée, bornée

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
- On dit que la partie A est *majorée* lorsqu'elle admet au moins un majorant.
- On dit que la partie A est *minorée* lorsqu'elle admet au moins un minorant.
- On dit que la partie A est *bornée* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 1.8. — L'ensemble $A = \mathbb{Q} \cap]0,1[$ est majoré et le nombre 1 en est un majorant, puisque tout élément de A est inférieur ou égal à 1.

Exemple 1.9. — L'ensemble $A' = \{0, \pi, e\} \cup [-20, -15]$ est borné, car majoré (par exemple par 4) et minoré (par exemple par -22).

Exemple 1.10. — Montrons que l'ensemble $B = \left\{\sqrt{x+3},\ x \in \mathbb{R}^+\right\}$ n'est pas majoré.

Dire que B est majoré s'écrit avec des quantificateurs

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x+3} \leq M;$$

ce que nous devons démontrer est la négation de l'assertion précédente, c'est donc l'énoncé

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x+3} > M.$$

Soit M un nombre réel.

Nous devons démontrer qu'il existe un n de $\mathbb{N}$ vérifiant $\sqrt{n+3} > M$, c'est-à-dire : $n > M^2 - 3$.

- Si $M^2 - 3 > 0$, l'existence d'un tel entier est garantie par la propriété d'Archimède.
- Si $M^2 - 3 \leq 0$, alors $n = 1$ convient.

Dans tous les cas, l'existence est assurée.

Exemple 1.11. — L'ensemble B ci-dessus n'est pas borné, car il n'est pas majoré (il est pourtant minoré, par exemple par 0). De même, $]-\infty, 12[$ n'est pas borné, puisqu'il est majoré mais pas minoré.

Remarque 1.12. — Si A est une partie majorée de $\mathbb{R}$ et si M est un majorant de A, alors tout nombre supérieur ou égal à M est aussi un majorant de A. Par conséquent, si une partie de $\mathbb{R}$ admet au moins un majorant, alors elle en admet une infinité. Parler « du » majorant, sans précision supplémentaire, n'a donc aucun sens.

2.3. Plus grand ou plus petit élément. —

2.3.1. *Définition et exemples.* —

Définition 1.13 – Plus grand élément

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A *admet un plus grand élément* si elle contient un de ses majorants, c'est-à-dire s'il existe un réel M vérifiant

(i) M appartient à A ;

(ii) $\forall y \in A, \quad y \leq M$.

Lorsqu'un réel M vérifie les propriétés (i) et (ii) ci-dessus, on dit que c'est un [9] *plus grand élément de A*.

Remarque 1.14. — Une partie admettant un plus grand élément est nécessairement majorée.

***Remarque 1.15* (Notion de plus petit élément).** — On définit, de même, la notion de plus petit élément : une partie A de $\mathbb{R}$ admet un plus petit élément si elle contient l'un de ses minorants, et dans ce cas un réel qui est à la fois un élément de A et un minorant de A est appelé un plus petit élément de A.

Exemple 1.16. — Le nombre 3 est un plus grand élément de $[-3, 3]$ (c'est en fait le seul comme nous allons le voir plus loin), et (-3) est un plus petit élément de $[-3, 3]$.

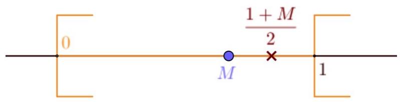
***Exemple 1.17* (Il peut ne pas exister de plus grand élément).** — Considérons la partie $A = [0, 1[$ de $\mathbb{R}$. Elle est bien sûr majorée (par exemple par 1).
Mais si elle admettait un plus grand élément, il existerait un réel M vérifiant

(i) $M \in [0, 1[$;

(ii) $\forall x \in [0, 1[,\ x \leq M$

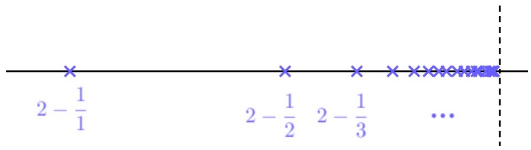
et c'est impossible : si $0 \leq M < 1$, alors le nombre $x = \frac{M+1}{2}$ vérifie $0 \leq x < 1$, donc $x \in [0, 1[$, et on a $x > M$, ce qui contredit (ii).

9. Nous pourrons bientôt dire : *le* plus grand élément de A, une fois que nous aurons montré qu'il ne peut y en avoir qu'un.



***Exemple 1.18* (Un exemple d'étude complète).** — Considérons la partie

$$A = \left\{ 2 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^\star \right\}.$$



- La partie A admet un plus petit élément, le nombre 1. Justifions-le :
  (i) le nombre 1 appartient à A (puisqu'il est égal à $2 - \frac{1}{n}$ avec $n = 1$) ;
  (ii) c'est un minorant de A : si x est un élément de A, il existe un entier $n \geq 1$ vérifiant $x = 2 - \frac{1}{n}$, et alors $-\frac{1}{n} \geq -1$, donc $\left(2 - \frac{1}{n}\right) \geq (2 - 1)$ et $x \geq 1$.
- La partie A est majorée puisque 2, par exemple, en est un majorant ; mais elle n'a pas de plus grand élément.

  Pour vérifier que A n'a pas de plus grand élément, raisonnons par l'absurde.

  Supposons que M soit un plus grand élément de A. Alors :
  (i) puisque M appartient à A, il existe un entier n_0 de $\mathbb{N}^\star$ vérifiant : $M = 2 - \frac{1}{n_0}$;
  (ii) puisque M est un majorant de A, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 2 - \frac{1}{n} \leq M$.

  Mais ces deux contraintes sont incompatibles, puisqu'il existe des nombres de la forme $2 - \dfrac{1}{n}$ au-delà de $2 - \frac{1}{n_0}$: par exemple, si nous considérons le nombre $x = 2 - \dfrac{1}{n_0 + 999}$, alors le point (ii) impose $x \leq M$, alors qu'il est clair que $x > M$ (puisque $\dfrac{1}{n_0 + 999} < \dfrac{1}{n_0}$). Nous obtenons donc une contradiction et A ne peut avoir de plus grand élément.

Exercice 1.3. —

1. Soient a et b deux réels avec $a < b$.
   Vérifier que $[a, b]$ admet un plus grand élément et un plus petit élément.
   Vérifier que $]a, b]$ admet un plus grand élément mais pas de plus petit élément.
2. Soit A la partie $\left\{\frac{1}{n^3},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\}$.
   Dessiner A. Vérifier que A admet un plus grand élément mais pas de plus petit élément.
3. Soit $B = \left\{\frac{|n|-1}{n},\ n \in \mathbb{Z}^\star\right\}$. Dessiner B. Vérifier que B n'a ni plus petit élément, ni plus grand élément.
4. Soit C la partie $\left\{\frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\}$.
   Dessiner C. Sans écrire dans un premier temps de démonstration, « deviner » si C a un plus petit élément, un plus grand élément.
   Démontrer ensuite très soigneusement vos conjectures.

Proposition 1.19 – Unicité du plus grand élément, sous réserve d'existence

Soit A une partie de $\mathbb{R}$; soient M_1, M_2 deux réels.
Si M_1 est un plus grand élément de A et si M_2 est aussi un plus grand élément de A, alors $M_1 = M_2$.

Vocabulaire. — *Ce résultat signifie que si un ensemble A admet un plus grand élément, alors il n'y a qu'un nombre qui en soit le plus grand élément : on le notera* $\max(A)$*. Par exemple, si $A = [-6, 4]$, alors A admet un* *plus grand élément et* $\max(A) = 4$. *De même, si* A *admet un plus petit élément, alors il en admet un seul. On le note alors* $\min(A)$.

Démonstration de la proposition. — Soient M_1 et M_2 deux réels vérifiant les propriétés (i) et (ii) de la définition.

- Le nombre M_1 appartient à A (propriété (i) pour M_1) et le nombre M_2 est un majorant de A (propriété (ii) pour M_2), donc $M_1 \leq M_2$.
- Le nombre M_2 appartient à A (propriété (i) pour M_2) et le nombre M_1 est un majorant de A (propriété (ii) pour M_1), donc $M_2 \leq M_1$.

Les deux inégalités montrent bien : $M_1 = M_2$. □

Attention. — On ne peut écrire $\max(A)$ que si on a *déjà* démontré que A admet un plus grand élément, ou si on se trouve dans un contexte où l'existence du plus grand élément ne fait pas de doute.

Au contraire, si A est une partie donnée de $\mathbb{R}$, il n'y a aucune raison de penser qu'elle a un plus grand élément si on n'a pas d'information supplémentaire : c'est une erreur grave de parler de $\max(A)$ (ou de s'en servir dans des exercices) si on n'a pas déjà étudié l'existence d'un plus grand élément pour A ou si cette existence n'est pas évidente d'après le contexte.

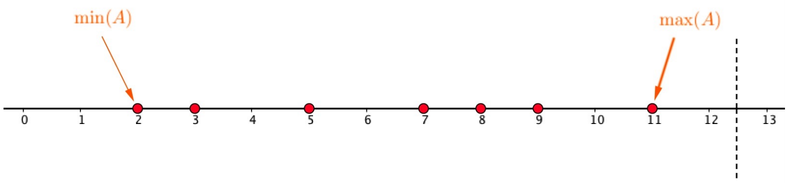
Exercice 1.4. — Après avoir fermé ce polycopié, écrire un énoncé assurant l'unicité du plus petit élément sous réserve d'existence ; démontrer ce résultat.

2.3.2. *Cas des parties de* $\mathbb{N}$. — Voici un cas *très particulier* où l'existence d'un plus petit élément ou d'un plus grand élément ne fait jamais de doute.

Proposition 1.20 – Plus petit et plus grand élément pour les parties de $\mathbb{N}$

(a) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ *a un plus petit élément.*

(b) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ *a un plus grand élément.*



Cas où A *est la partie non vide et majorée de* $\mathbb{N}$ *figurée par les points rouges.*

Démonstration. — Ces deux propriétés relèvent de l'étude de $\mathbb{N}$ plutôt que de celle de $\mathbb{R}$ et les démonstrations sont assez particulières. On pourra les omettre en première lecture.

(a) Nous allons montrer qu'une partie de $\mathbb{N}$ qui n'admet pas de plus petit élément est nécessairement vide, ce qui prouvera la première affirmation. Soit A une partie de $\mathbb{N}$ qui n'admet pas de plus petit élément. Considérons l'ensemble

$$E = \{n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{0, \dots n\},\ k \notin A\}$$

des entiers en-deçà desquels on ne trouve aucun élément de A. Nous allons montrer que $E = \mathbb{N}$ par récurrence.

- On constate : $0 \in E$. En effet, le seul entier k vérifiant $k \leq 0$ est $k = 0$; or, 0 ne peut pas appartenir à A : si c'était le cas 0 serait à la fois un élément de A et un minorant de A puisque $A \subset \mathbb{N}$, donc A admettrait un plus petit élément.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que n appartienne à E et montrons que $(n+1)$ appartient nécessairement aussi à E. Comme n appartient à E, aucun entier k entre 0 et n n'appartient à A ; comme A est une partie de $\mathbb{N}$, on a : $\forall x \in A,\ x \geq (n+1)$. Donc $(n+1)$ est un minorant de A.
  Si $(n+1)$ appartenait à A, ce serait alors un plus petit élément de A, ce qui n'est pas possible puisque A n'a pas de plus petit élément.
  Ainsi A ne contient ni $(n+1)$ ni aucun entier entre 0 et n, autrement dit : $\forall k \in \{0, \dots, (n+1)\}, k \notin A$. Nous avons bien montré : $(n+1) \in E$.
- Par récurrence, on obtient : $(\forall n \in \mathbb{N},\ n \in E)$, donc $E = \mathbb{N}$, comme annoncé.

Mais alors pour tout n de $\mathbb{N}$, l'entier n appartient à E, ce qui a pour conséquence : $n \notin A$... si bien que A est vide, CQFD.

(b) Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$.

On sait qu'il existe un nombre *réel strictement positif* M_0 vérifiant : $\forall x \in A,\ x \leq M_0$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un nombre *entier naturel* μ vérifiant $\mu \geq M_0$; ce nombre μ est aussi un majorant de A.

Considérons alors l'ensemble

$$E = \{\mu - x,\ x \in A\}.$$

- On constate que E est une partie non vide [10] de [11] $\mathbb{N}$.
- Ainsi, la partie E admet un plus petit élément. Notons-le e.
  Comme e appartient à E, on a $e = \mu - \alpha$, où α est un élément de A. Vérifions que α est un plus grand élément de A.
  Le fait que $e = \mu - \alpha$ soit un minorant de E se traduit par : $\forall a \in A,\ (\mu - \alpha) \leq (\mu - a)$. Comme cela équivaut à $\forall a \in A,\ a \leq \alpha$, le nombre α est à la fois un élément de A et un majorant de A, donc A admet α pour plus grand élément.

□

2.3.3. *Cas des parties finies de* $\mathbb{R}$. — Le résultat (b) ci-dessus peut naturellement être étendu aux parties de $\mathbb{R}$ qui ne comportent qu'un nombre fini d'éléments, mais dont les éléments ne sont pas nécessairement des entiers.

Proposition 1.21 – Plus grand et plus petit élément : cas des parties finies de $\mathbb{R}$

Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui ne comporte qu'un nombre fini d'éléments, alors A admet un plus grand élément et un plus petit élément.

Démonstration. — Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments. Pour chaque n de $\mathbb{N}^\star$, notons $\mathcal{P}(n)$ l'énoncé

« Toute partie de $\mathbb{R}$ qui comporte exactement n éléments admet un plus grand élément et un plus petit élément ».

- L'énoncé $\mathcal{P}(1)$ est vrai : si $A = \{\alpha\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui comporte un seul élément, alors α est un majorant de A (tout élément de A est bien inférieur ou égal à α !) et α appartient à A, donc A admet bien un plus grand élément et $\max(A) = \alpha$. De même, α est le plus petit élément de A.
- Soit n un élément de $\mathbb{N}^\star$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai. Montrons l'énoncé $\mathcal{P}(n+1)$. Nous devons vérifier que toute partie de $\mathbb{R}$ qui comporte exactement $n+1$ éléments admet un plus petit élément et un plus grand élément.
  Soit A une partie de $\mathbb{R}$ comportant exactement $n+1$ éléments. Fixons un élément α de A. La partie $B = A - \{\alpha\}$ comporte exactement n éléments. D'après la propriété $\mathcal{P}(n)$ qui est notre hypothèse de récurrence, la partie B admet un plus grand et un plus petit élément. Notons $M = \max(B)$; deux cas peuvent se présenter :
  - **Cas 1 :** $M \leq \alpha$.
    Dans ce cas α est supérieur ou égal à M qui est lui-même supérieur ou égal à tous les éléments de B. En conséquence α est supérieur ou égal à tous les éléments de A, donc c'est un majorant de A. De plus, α appartient à A. Nous constatons donc que A admet un plus grand élément et que : $\max(A) = \alpha$.
  - **Cas 2 :** $M \geq \alpha$.
    Dans ce cas M est supérieur ou égal à tous les éléments de B, mais aussi à α, donc il est supérieur ou égal à tous les éléments de A. Ainsi M est un majorant de A. Comme $M = \max(B)$, M est un élément de B, qui est inclus dans A, et on a : $M \in A$. Nous constatons donc que A admet un plus grand élément et que : $\max(A) = M$.

  Nous constatons donc que A admet un plus grand élément. On raisonne de même pour l'existence d'un plus petit élément.
- Par récurrence, nous savons que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, ce qui prouve la proposition.

□

10. En effet, A est non vide : si x_0 est un élément de A, $\mu - x_0$ est un élément de E.
11. Comme μ est entier et $A \subset \mathbb{N}$, on a $E \subset \mathbb{Z}$. De plus, comme μ est un majorant de A, tous les éléments de E sont positifs, donc $E \subset \mathbb{N}$.

2.4. Borne supérieure, définition. —

Définition 1.22 – Borne supérieure

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et M un nombre réel. On dit que M est borne supérieure de A lorsque :

(a) le nombre M est un majorant de A ;

(b) si S est un majorant de A, alors $S \geq M$.

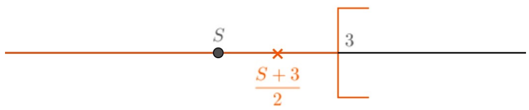
On peut reformuler la définition de la façon suivante.

Un nombre est borne supérieure de A lorsque c'est le plus petit des majorants de A.

Exemple 1.23. — Vérifions que 3 est borne supérieure de $]-\infty, 3[$.

(a) C'est un majorant de $]-\infty, 3[$: pour tout x de $]-\infty, 3[$, on a bien $x \leq 3$.

(b) Vérifions que si S est un majorant de $]-\infty, 3[$, alors $S \geq 3$. Nous allons raisonner par contraposée. Soit S un nombre réel ; supposons $S < 3$. Dans ce cas, le nombre $x = \frac{S+3}{2}$ appartient à $]-\infty, 3[$ et on a $x > S$, donc S ne peut être un majorant de $]-\infty, 3[$.



Nous avons bien vérifié que si $S < 3$, alors S n'est pas un majorant de $]-\infty, 3[$.

Exemple 1.24. — Reprenons l'ensemble $A = \left\{2 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\}$ de la page 10. Vérifions que 2 est borne supérieure de A.

(a) Le nombre 2 est bien sûr un majorant de A.

(b) Vérifions que si S est un majorant de A, alors $S \geq 2$. Nous allons raisonner par l'absurde. Soit S un majorant de A. Supposons $S > 2$. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 2 - \frac{1}{n} \leq S$, ce qui se réécrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \frac{1}{n} \geq 2 - S.$$

Or, sous l'hypothèse que nous avons faite, le nombre $\varepsilon = 2 - S$ est strictement positif, donc la propriété d'Archimède garantit l'existence d'un élément n de $\mathbb{N}^\star$ vérifiant $\frac{1}{n} < \varepsilon$. On a abouti à une contradiction.

Exemple 1.25. — Considérons l'ensemble $C = \left\{x^2 + 1,\ x \in [0, 2[\right\}$. Dans cet exemple, nous *admettons* que C a une borne supérieure.

On constate d'abord que tout élément de C est strictement inférieur à 5 : de

$$\forall x \in [0, 2[,\ x^2 + 1 < 5$$

on déduit

$$\forall c \in C,\ c < 5.$$

En conséquence, 5 est un majorant de C, donc il est supérieur *ou égal* au plus petit majorant de C. Ainsi

$$\sup(C) \leq 5.$$

On notera que l'inégalité stricte n'est *pas* conservée par ce « passage à la borne supérieure ».

Exercice 1.5. — Savez-vous démontrer que 5 est en fait borne supérieure de C ?

Proposition 1.26 – Unicité de la borne supérieure, sous réserve d'existence

Soit A une partie de $\mathbb{R}$; soient M_1, M_2 deux réels.
Si M_1 est borne supérieure de A et si M_2 l'est aussi, alors $M_1 = M_2$.

Démonstration. — Si A, M_1 et M_1 sont comme dans l'énoncé de la proposition, le nombre M_1 est un majorant de A et le nombre M_2 est borne supérieure de A, donc d'après la propriété (b) de la page précédente, on a $M_2 \leq M_1$; en échangeant les rôles de M_1 et M_2 dans la phrase précédente on obtient de même $M_1 \leq M_2$, d'où $M_1 = M_2$. □

Notation. — *Si A est une partie de $\mathbb{R}$ qui admet une borne supérieure, alors on note* $\sup(A)$ *sa borne supérieure.*

Exercice 1.6. —

1. Soit b un nombre réel. Vérifier que b est borne supérieure de $]-\infty, b[$.
   Soit $a \in \mathbb{R}$, $a < b$. Voyez-vous comment adapter le raisonnement pour vérifier que b est borne supérieure de $[a, b[$?
2. Démontrer que si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ admettant chacune une borne supérieure
   et si $A \subset B$, alors $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Définition 1.27 – Borne inférieure

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et m un nombre réel. On dit que m est borne inférieure de A lorsque :

(a) le nombre m est un minorant de A ;

(b) si u est un autre minorant de A, alors $u \leq m$.

Ainsi, la borne inférieure de A, lorsqu'elle existe, est le plus grand des minorants de A. Comme pour la borne supérieure, on peut démontrer que si A admet une borne inférieure, elle n'en admet qu'une seule : on la note $\inf(A)$.

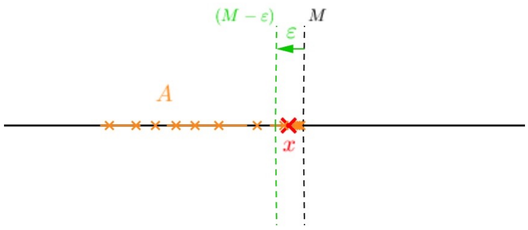
2.5. Caractérisation de la borne supérieure. —

Théorème 1.28 – Caractérisation de la borne supérieure

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Un réel M est borne supérieure de A si et seulement si :

(i) *M est un majorant de A ;*

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \ \ x > (M - \varepsilon)$.



Démonstration. — Soit M un nombre réel.

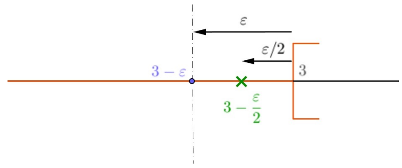
- Supposons d'abord que M vérifie (i) et (ii) et montrons qu'alors il est borne supérieure de A.
  - Par hypothèse M est un majorant de A bien sûr ;
  - Soit S un nombre réel. Montrons que si S un majorant de A, alors $S \geq M$. Raisonnons par contraposée. Supposons $S < M$ et montrons que S ne peut être un majorant de A.
    Le nombre $\varepsilon = M - S$ est strictement positif, donc d'après (ii), il existe un élément x de A vérifiant :
    $x > M - \varepsilon = M - (M - S)$, c'est-à-dire $x > S$. Mais alors S n'est pas un majorant de A, ce qu'il fallait démontrer.
- Supposons maintenant que M est borne supérieure de A ; montrons qu'alors il vérifie (i) et (ii).
  Bien sûr (i) fait partie de la définition de la borne supérieure. Montrons (ii) :
  Soit $\varepsilon > 0$. Dans la mesure où $M - \varepsilon$ est strictement inférieur à $M = \sup(A)$, il est strictement inférieur au plus petit des majorants de A, donc ce n'est pas un majorant de A. Cette dernière affirmation signifie qu'il existe un élément x de A vérifiant : $x > M - \varepsilon$, comme voulu. □

□

Pour donner de premiers exemples d'utilisation du théorème, nous reprenons les exemples 1.23 et 1.24 de la page précédente en les traitant avec la caractérisation.

Exemple 1.29. — Vérifions que 3 est borne supérieure de $[0,3[$ en utilisant la caractérisation.

1. Le nombre 3 est bien un majorant de $[0,3[$.
2. Soit ε un nombre strictement positif. Montrons qu'il existe un nombre x de $[0,3[$ vérifiant : $x > 3-\varepsilon$:
   - Si $\varepsilon \geq 3$, alors il suffit de choisir $x = 0$;
   - Si $\varepsilon < 3$, alors on peut choisir $x = 3 - \frac{\varepsilon}{2}$; c'est bien un élément de $[0,3[$ puisque $\frac{\varepsilon}{2}$ est entre 0 et 1.5, et on a bien $x > 3-\varepsilon$.



Exemple 1.30. — Vérifions que 2 est borne supérieure de $A = \left\{2 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\}$ en utilisant la caractérisation.

1. Le nombre 2 est bien un majorant de A (déjà vu).
2. Soit ε un nombre strictement positif. Montrons qu'il existe un nombre x de A vérifiant : $x > 2-\varepsilon$.
   Compte tenu de la définition de A, nous devons vérifier qu'il existe un élément n de $\mathbb{N}^\star$ vérifiant : $2 - \frac{1}{n} > 2 - \varepsilon$, c'est-à-dire : $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Mais ceci est garanti par la propriété d'Archimède.

Exercice 1.7. — Montrer que 1 est borne supérieure de $\left\{1 - \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\}$.

2.6. La propriété fondamentale d'existence. — Dans ce numéro, on dit quelles sont les parties de $\mathbb{R}$ qui admettent une borne supérieure et quelles sont celles qui n'en admettent pas.

- Puisque la borne supérieure d'un ensemble, lorsqu'elle existe, en est forcément un majorant, une partie de $\mathbb{R}$ ne peut pas admettre de borne supérieure si elle n'est pas majorée. Par exemple, l'intervalle $[3,+\infty[$ n'est pas majoré, donc il ne peut pas admettre de « plus petit majorant » et n'a pas de borne supérieure.
- De plus, l'ensemble vide n'a pas de borne supérieure, car tous les réels en sont des majorants (en effet, si M est un réel *quelconque*, l'assertion « $\forall x \in \emptyset,\ x \leq M$ »... est vraie), il ne peut donc pas admettre de plus petit majorant.

Pour qu'une partie de $\mathbb{R}$ puisse admettre une borne supérieure, il *faut* donc qu'elle soit non vide et majorée. L'un des résultats les plus fondamentaux de ce cours est le fait que ces deux conditions très simples *suffisent* en fait à garantir l'existence d'une borne supérieure :

Théorème 1.31 – Propriété de la borne supérieure pour $\mathbb{R}$

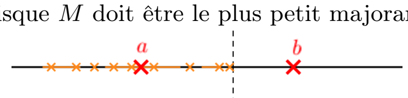
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Remarque 1.32. —

1. Ce théorème fondamental est difficile à imaginer et difficile à démontrer, mais facile à utiliser.
2. Si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, le théorème ci-dessus affirme l'existence d'une borne supérieure pour A, mais ne donne pas la valeur de $\sup(A)$!

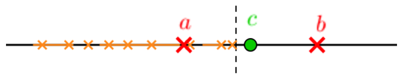
Démonstration. — Prouver ce résultat n'est pas facile à ce stade de l'année. La démonstration ne peut être qu'abstraite : si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, éventuellement très compliquée et sur laquelle on ne sait rien de plus, on doit *construire* un candidat naturel à être le « bord droit » de A.

- Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Notons a un élément de A et b un majorant de A.
- Si A admet bien une borne supérieure et si nous la notons M, on aura nécessairement : $a \leq M$ (puisque M doit être un majorant de A) et $M \leq b$ (puisque M doit être le plus petit majorant possible).

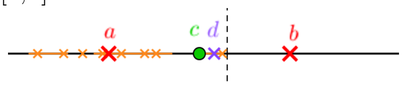


C'est donc dans le segment $[a,b]$ qu'il faut chercher une éventuelle borne supérieure de A.

- Nous allons « chercher l'endroit de $[a,b]$ où doit se trouver la borne supérieure » en utilisant la méthode de dichotomie déjà rencontrée p. 7 : nous allons construire une suite de segments emboîtés en cherchant à « zoomer » de plus en plus près de la zone où doit se trouver la borne supérieure.
- Notons $c = \frac{a+b}{2}$. Alors de deux choses l'une :
  — Soit c est un majorant de A, et dans ce cas si A admet une borne supérieure, elle doit se trouver dans $[a,c]$ (pour la même raison que précédemment).



  — Soit c n'est pas un majorant de A ; dans ce cas il n'est pas vrai qu'on ait $(\forall x \in A, x \leq c)$, donc on a $(\exists x \in A \ / \ x > c)$, et alors il existe un élément d de A vérifiant $d > c$; mais alors si A admet une borne supérieure, elle doit se trouver dans $[d,b]$.



  Dans les deux cas on constate qu'il y a un segment ($[a,c]$ dans le premier cas, $[d,b]$ dans le second) qui est inclus dans $[a,b]$, dont la longueur est au plus la moitié de la longueur de $[a,b]$, et qui doit contenir la borne supérieure de A si borne supérieure il y a.
- On peut ensuite itérer ce processus pour construire par récurrence une suite de segments emboîtés, de la manière suivante.
  On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
  Soit n un entier naturel ; supposons construits des segments $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, ..., $[a_n,b_n]$ vérifiant :
  — pour chaque k de $\{0,..,n\}$, a_k est un élément de A et b_k est un majorant de A ;
  — pour chaque k de $\{1,..,n\}$, $[a_k,b_k] \subset [a_{k-1},b_{k-1}]$ et $(b_k - a_k) \leq \frac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2}$.
  Considérons alors $c = \frac{a_k+b_k}{2}$.
  $\rightsquigarrow$ Si c est un majorant de A, on pose $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c$;
  $\rightsquigarrow$ Si c n'est pas un majorant de A, il existe un élément d de A appartenant à $[c,b_k]$ et on pose $a_{k+1} = d$ et $b_{k+1} = b_k$.
  On construit ainsi un segment $[a_{n+1},b_{n+1}]$ dont l'extrémité gauche est un élément de A, dont l'extrémité droite b_{n+1} est un majorant de A, qui est inclus dans $[a_n,b_n]$ et dont la longueur est inférieure ou égale à $\frac{b_n-a_n}{2}$.
- On obtient ainsi une suite $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés. D'après la propriété des segments emboîtés, $I = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$ est non vide.
- Vérifions qu'en fait il n'y a qu'un nombre dans l'intersection $I = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$. Si α et β sont deux éléments de I et si $\alpha \neq \beta$, disons $\alpha < \beta$, alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \beta - \alpha \leq b_n - a_n$$
  (car pour tout n, on a $\beta \leq b_n$ et $\alpha \geq a_n$). Or pour chaque n de $\mathbb{N}^\star$, on a : $b_n - a_n \leq \frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}$. On en déduit
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \beta - \alpha \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n} \leq \frac{b-a}{n} \qquad (\star)$$
  (la première inégalité se démontre par récurrence, la deuxième inégalité vient de ce que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n$ et de ce que $b_0 = b$, $a_0 = a$).
  Mais ceci est impossible : d'après la propriété d'Archimède, il existe un entier n vérifiant $n > \frac{\beta-\alpha}{b_0-a_0}$, ce qui contredit $(\star)$.
- Ainsi il existe un réel μ vérifiant : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n = \{\mu\}$. Vérifions que μ est borne supérieure de A en vérifiant la caractérisation de la borne supérieure.
  (a) Soit x un élément de A. Supposons $x > \mu$. Notons alors $\delta = x - \mu$; d'après la propriété d'Archimède il existe un n de $\mathbb{N}^\star$ vérifiant $\frac{b-a}{n} < \delta$. Mais alors en réutilisant les idées menant à $(\star)$, on a : $b_n - \mu \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{n} < \delta$, donc $(b_n - \mu) < (x - \mu)$ et enfin $b_n < x$, ce qui est absurde car par construction b_n est un majorant de A.
  (b) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la propriété d'Archimède il existe un n de $\mathbb{N}^\star$ vérifiant : $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Mais alors on a : $\mu - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon$; en posant $x = a_n$, on sait que x est un élément de A (puisque par construction a_n appartient à A) et on a $x > \mu - \varepsilon$.

  Nous avons bien vérifié que μ satisfait la caractérisation de la borne supérieure, on obtient donc $\mu = \sup(A)$; l'existence d'une borne supérieure pour A est démontrée.

□

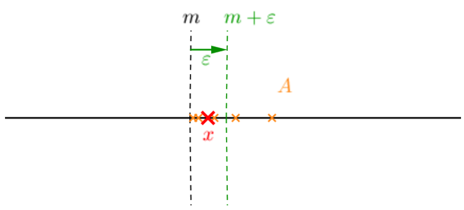
2.7. Caractérisation et théorème d'existence pour la borne inférieure. —

Théorème 1.33 – Caractérisation de la borne inférieure

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Un réel m est borne inférieure de A si et seulement si :

(i) m *est un minorant de* A *;*

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$, $x < (m + \varepsilon)$.



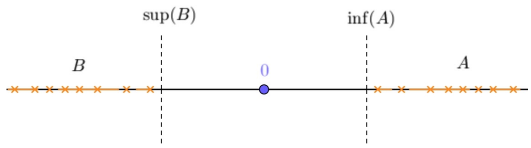
Exercice 1.8. — Rédiger une démonstration de ce théorème (on imitera §2.5).

Théorème 1.34 – Propriété de la borne inférieure pour $\mathbb{R}$

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

***Exercice 1.9* (Démonstration guidée du théorème).** — Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Notons

$$B = \{-a,\ a \in A\}.$$



1. Soit s un nombre réel. Montrer que s est un majorant de B si et seulement si $-s$ est un minorant de A.
2. En déduire que B admet une borne supérieure.
3. Notons $M = \sup(B)$ et $\mu = -M$. Dire pourquoi μ est un minorant de A, puis démontrer que μ est borne inférieure de A.

2.8. Borne supérieure ou plus grand élément ? — Il ne faut pas confondre « borne supérieure » et « plus grand élément » : si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, elle admet toujours une borne supérieure, mais l'existence d'un plus grand élément pour A n'est absolument pas automatique (par exemple, nous avons vu que $]-\infty, 3[$ a une borne supérieure mais pas de plus grand élément).

Dans le cas *très particulier* où A admet un plus grand élément, il y a bien sûr des liens entre ce plus grand élément et le « bord droit » $\sup(A)$ de A :

Proposition 1.35 – Plus grand élément $\implies$ borne supérieure

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si A admet un plus grand élément, alors elle admet une borne supérieure et $\sup(A)$ *n'est autre que* $\max(A)$.

Démonstration. — Supposons que A admette un plus grand élément ; notons $\mu = \max(A)$.

(a) Le nombre μ est un majorant de A.

(b) Soit S un majorant de A. On a : $\forall x \in A, x \leq S$ et comme μ est un élément de A, on en déduit $\mu \leq S$.

Ainsi μ est le plus petit des majorants de A, donc A admet une borne supérieure et $\sup(A) = \mu$. □

Inversement, lorsqu'on *connaît déjà* la borne supérieure de A, il n'y a pas d'autre candidat possible pour le plus grand élément :

Proposition 1.36 – Critère d'existence d'un plus grand élément lorsqu'on connaît le sup

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors il y a équivalence entre :
- *A admet un plus grand élément ;*
- $\sup(A) \in A$.

Démonstration. — Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
- Si A admet un plus grand élément, alors $\sup(A)$ coïncide avec $\max(A)$, qui est un élément de A, donc $\sup(A) \in A$.
- Supposons : $\sup(A) \in A$. Alors $\sup(A)$ est un majorant de A qui appartient à A, donc A admet un plus grand élément et ce plus grand élément n'est autre que $\sup(A)$.

□

Attention. — Ce résultat ne permet pas de montrer que A admet un plus grand élément si on ne connaît pas déjà la borne supérieure de A.

Proposition 1.37 – Plus petit élément $\implies$ borne inférieure

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si A admet un plus petit élément, alors elle admet une borne inférieure et $\inf(A)$ *n'est autre que* $\min(A)$.

Proposition 1.38 – Critère d'existence d'un plus petit élément lorsqu'on connaît l'inf

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Alors il y a équivalence entre :
- *A admet un plus petit élément ;*
- $\inf(A) \in A$.

3. Intervalles

3.1. Définition abstraite. — Voici une définition abstraite de la notion de « partie qui n'a pas de trou » :

Définition 1.39 – Intervalle de $\mathbb{R}$

On dit qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* lorsqu'elle vérifie la propriété suivante :

Si x et y sont deux éléments de I avec $x < y$, alors tout réel compris entre x et y appartient aussi à I.

Avec des quantificateurs, « I est un intervalle » s'écrit donc :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall z \in \mathbb{R},\ \left(\quad x \leq z \leq y \quad \implies \quad z \in I \quad\right).$$

Exemple 1.40. — $\mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle : les nombres 0 et 1 appartiennent à $\mathbb{Z}$ et le nombre $1/3$ vérifie :

$$\left(\quad 0 \leq \frac{1}{3} \leq 1 \quad \text{mais} \quad \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \quad\right).$$

Exercice 1.10. —

1. Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle.
2. Montrer (soigneusement) que si I_1 et I_2 sont des intervalles de $\mathbb{R}$, alors $I_1 \cap I_2$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$.

3.2. Classification des intervalles. — Voyons maintenant pourquoi les « parties sans trou » sont les parties de $\mathbb{R}$ dont vous avez l'habitude.

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Supposons que I soit un intervalle (au sens de la définition 1.39) qui ne soit pas l'ensemble vide. Différentes situations peuvent se présenter pour I :

- **Cas I : I est borné.**
  Dans ce cas, il admet une borne inférieure et une borne supérieure. Notons-les a et b respectivement.
  Comme a est un minorant de I et b un majorant de I, on a : $\forall x \in I, \quad a \le x \le b$.
  Donc I est inclus dans le segment $[a, b]$. On doit alors distinguer les quatre cas suivants :
  - **Cas I(a) :** I admet un plus grand élément et un plus petit élément.
    Cela signifie (voir paragraphe précédent) que $a \in I$ et $b \in I$.
    Comme I est un intervalle, tous les nombres entre a et b sont aussi dans I.
    $\rightsquigarrow$ conclusion : dans ce cas, $I = [a, b]$.
  - **Cas I(b) :** I admet un plus petit élément mais pas de plus grand élément.
    Dans ce cas I contient a mais pas b, et $I \subset [a, b[$.
    Montrons qu'on a en fait $I = [a, b[$.
    Soit x un élément de $[a, b[$. Notons $\varepsilon = (b - x)$; c'est un nombre strictement positif.
    Par la caractérisation de la borne supérieure, il existe un élément β de I vérifiant : $\beta > b - \varepsilon$.
    Mais comme $b - \varepsilon = x$, le nombre x est compris entre a, qui appartient à I, et β, qui appartient à I.
    Comme I est un intervalle, on en déduit que x appartient aussi à I. Nous avons montré l'inclusion $[a, b[\subset I$.
  - **Cas I(c) :** I admet un plus grand élément mais pas de plus petit élément.
    On montre alors que $I =]a, b]$. Savez-vous le faire avec la caractérisation de la borne inférieure ?
  - **Cas I(d) :** I n'admet ni plus grand élément ni plus petit élément.
    Savez-vous montrer que $I =]a, b[$ en mettant ensemble les raisonnements des deux cas précédents ?

- **Cas II : I est majoré mais pas minoré.**
  Dans ce cas, I admet une borne supérieure b, mais pas de borne inférieure, et I est contenu dans $]-\infty, b]$.
  - **Cas II(a) :** I admet un plus grand élément.
    On a alors : $b \in I$. Montrons que dans ce cas $I =]-\infty, b]$.
    Soit x un élément de $]-\infty, b]$. Comme I n'est pas minoré, le nombre x n'en est pas un minorant, donc il existe un élément u de I vérifiant : $u < x$. Mais alors le nombre x est compris entre u et b, qui sont tous les deux dans I, et comme I est un intervalle, on a $x \in I$. Nous avons bien montré l'inclusion $]-\infty, b] \subset I$.
  - **Cas II(b) :** I n'admet pas de plus grand élément.
    Voyez-vous comment montrer que dans ce cas $I =]-\infty, b[$ en mettant ensemble les raisonnements du cas I(b) et celui du cas II(a) ?

- **Cas III : I est minoré mais pas majoré.**
  Dans ce cas, I admet une borne inférieure a, mais pas de borne supérieure, et I est contenu dans $[a, +\infty[$.
  - **Cas III(a) :** I admet un plus petit élément.
    Voyez-vous comment montrer que dans ce cas $I = [a, +\infty[$?
  - **Cas III(b) :** I n'admet pas de plus petit élément.
    Voyez-vous comment montrer que dans ce cas $I =]a, +\infty[$?

- **Cas IV : I n'est ni majoré ni minoré.** Voyez-vous comment montrer que dans ce cas $I = \mathbb{R}$?

Nous constatons donc que pour décrire un intervalle, il suffit de savoir s'il est majoré ou minoré et si, à chaque « extrémité » (gauche ou droite), le « bord » est un plus grand élément (donc compris dans l'intervalle) ou non.

Nous obtenons ainsi une liste exhaustive des intervalles de $\mathbb{R}$. Ce sont les parties de la forme :

$$\begin{array}{ll} [a,b], \quad [a,b[, \quad]a,b], \quad]a,b[& (a,b)\in\mathbb{R}^2 \\ [a,+\infty[, \quad]a,+\infty[& a\in\mathbb{R}, \\ ]-\infty,b], \quad]-\infty,b[& b\in\mathbb{R} \\ \mathbb{R}, \quad \emptyset & \end{array}$$

Définition 1.41 – Intervalle ouvert, segment

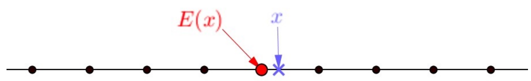
On dit qu'un intervalle non vide I est ouvert s'il est de la forme $I=]a,b[$, $]-\infty,b[$, $]a,+\infty[$ ou $I=\mathbb{R}$ avec a et b des réels. On dit qu'un intervalle I est un segment s'il est de la forme $I=[a,b]$ avec a et b des réels.

Exemple 1.42. — $[0,1]$ est un segment, $]0,1[$ est ouvert, $[0,1[$ n'est ni ouvert ni un segment.

4. Partie entière

Théorème et définition 1.43 – Partie entière d'un nombre réel

Si x est un nombre réel, alors il existe un unique entier relatif n vérifiant : $n\leq x<(n+1)$.
L'entier n est appelé *partie entière de x* ; on le note $E(x)$.



La partie entière de x est l'entier « immédiatement à gauche de x ».

Exemple 1.44. — $E(3.72)=3$, $E(17.001)=17$, $E(2.99)=2$.
Mais attention, $E(-7.00001)=-8$: l'entier immédiatement à gauche de -7.00001 est bien -8.

Démonstration du théorème. — Fixons un nombre réel x.

- Montrons l'unicité de la partie entière, sous réserve d'existence : supposons qu'il existe deux entiers n_1 et n_2 vérifiant

$$n_1\leq x<n_1+1$$
$$n_2\leq x<n_2+1.$$

  Alors en observant les deux inégalités, on constate : $n_1<n_2+1$.
  Or, n_1 et n_2 sont des *entiers*, donc ici $(n_1<n_2+1)$ signifie simplement $n_1\leq n_2$.
  En observant à nouveau les deux inégalités, on constate aussi $n_2<n_1+1$ et comme il s'agit d'entiers, on obtient $n_2\leq n_1$.

- Montrons maintenant l'existence.
  — Examinons d'abord le cas $x\geq 0$. Dans ce cas, l'ensemble

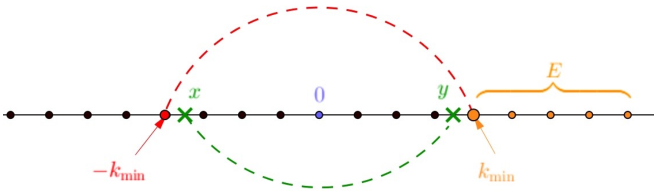
$$E=\{k\in\mathbb{N}\ /\ k\leq x\}$$

  est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ (non vide parce que $0\in E$, majorée parce que x en est un majorant).
  Ainsi E admet un plus grand élément. Notons-le n : il appartient à E, donc $n\leq x$; mais $(n+1)$ n'appartient pas à E, donc $x<(n+1)$. L'entier n vérifie bien $n\leq x<(n+1)$.

— Examinons maintenant le cas $x < 0$.
Dans ce cas le nombre $y = -x$ est positif et on peut penser que l'entier « immédiatement à gauche de x » n'est autre que l'entier « immédiatement à droite de y ». Considérons donc

$$E = \{k \in \mathbb{N} \ / \ k \geq y\}.$$

C'est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (le fait qu'elle soit non vide est dû à la propriété d'Archimède). Elle admet donc un plus petit élément ; notons-le $k_{\min}$.



Dans ce cas on a $k_{\min} \geq y$ (car $k_{\min} \in E$) et $(k_{\min} - 1) < y$ (car $(k_{\min} - 1) \notin E$). Ainsi,

$$k_{\min} \geq y > (k_{\min} - 1).$$

Notons $n = -k_{\min}$ et n'oublions pas que $y = -x$; l'inégalité ci-dessus signifie donc

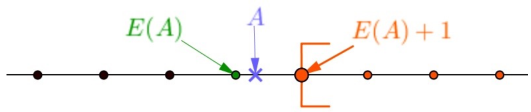
$$-n \geq -x > (-n - 1);$$

en passant à l'opposé on obtient $n \leq x < (n + 1)$, ce qu'il fallait démontrer.

□

Remarque 1.45. — On note parfois $[x]$ ou $\lfloor x \rfloor$ plutôt que $E(x)$. Cette tradition remonte à Gauss, mais l'informatique l'a réveillée. En anglais (et donc dans les langages de programmation), « partie entière de x » se note parfois : `floor`(x).

Remarque 1.46 **(Exemple d'utilisation de la notion de partie entière)**
Soit A un nombre réel. Le plus petit entier m vérifiant $m > A$ est $m = E(A) + 1$.



Application. 1.47. — *Fixons un nombre $\varepsilon > 0$. Quels sont les entiers m vérifiant : $\frac{5}{n^2} < \varepsilon$?*
Cette inégalité équivaut à $5 < \varepsilon \cdot n^2$, ou encore : $n > \sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}$.

D'après la remarque précédente, un entier n vérifie cette condition si et seulement si : $n \geq E\left(\sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}\right) + 1$.

Exercice 1.11. —

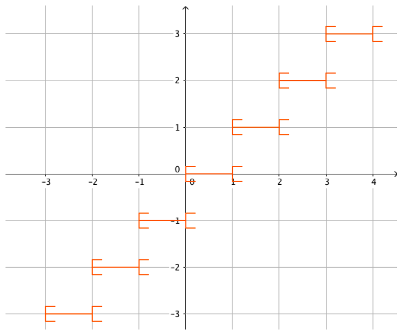
1. Soit ε un nombre réel. Quels sont les entiers n de $\mathbb{N}^\star$ vérifiant : $\frac{1}{n} < \varepsilon$?
2. Soit A un nombre réel positif. Quels sont les entiers n vérifiant : $n^2 > A$?

Exercice 1.12. —
1. Adapter la preuve ci-dessus pour démontrer la propriété suivante : pour tout réel x, il existe un unique entier n vérifiant : $(n - 1) < x \leq n$. Cet entier est la *partie entière supérieure de* x, on le notera $\tilde{E}(x)$.
2. Soit x un nombre réel. Montrer que si x est entier, on a $E(x) = \tilde{E}(x) = x$.
3. Soit x un nombre réel. Montrer que si x n'est pas entier, on a $\tilde{E}(x) = E(x) + 1$.

La fonction « partie entière » . — La notion de partie entière donne lieu à la *fonction partie entière*

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto E(x). \end{aligned}$$

Voici son graphe :



5. Valeur absolue et distance sur $\mathbb{R}$

5.1. La fonction « valeur absolue ». — On rappelle que si x est un nombre réel, on note $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Si x et y sont deux nombres réels, la longueur du segment qui joint x à y est [12] donnée par $|x-y|$. On note parfois : $d(x,y) = |x-y|$.

Dans $\mathbb{R}$, la valeur absolue permet donc de donner un sens précis à des affirmations comme

« ces deux nombres sont à distance < 3 » ;

pour cette raison, elle est omniprésente en analyse.

Cas des distances à un point a de $\mathbb{R}$: si x est un réel et ε un réel strictement positif,

$$\begin{aligned} |x-a| < \varepsilon &\iff x \text{ est à une distance de } a \text{ inférieure à } \varepsilon \\ &\iff x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\\ &\iff a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \end{aligned}$$

Cas des distances à zéro : si x est un réel et M un réel positif,

$$\begin{aligned} |x| \leq M &\iff x \in [-M, M] \\ &\iff -M \leq x \leq M \end{aligned}$$

5.2. L'inégalité triangulaire et quelques variations importantes. — Rappelons l'inégalité triangulaire, vue et manipulée dans le cours « Calcul » de la pré-rentrée :

Proposition 1.48 – Inégalité triangulaire

La fonction valeur absolue a les propriétés suivantes :

(i) Inégalité triangulaire. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leq |x| + |y|$.

(ii) Inégalité triangulaire, version avec la différence : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \leq |x| + |y|$.

(iii) Inégalité triangulaire, version « distance ». $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ |x-z| \leq |x-y| + |y-z|$.

(iv) Inégalité triangulaire « inversée » : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

12. cela peut être adopté pour *définition* de la longueur d'un segment de $\mathbb{R}$

5.3. Caractérisation des parties bornées. —

Proposition 1.49 – Parties bornées et majoration de la valeur absolue

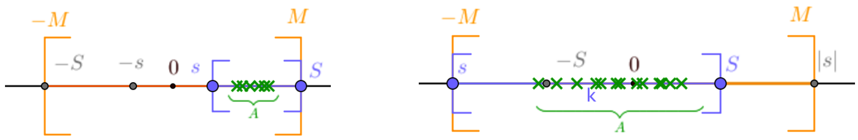
Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) La partie A est bornée ;

(b) il existe un réel positif M vérifiant : $\forall x \in A,\ |x| \leq M$.

Démonstration. —

- Constatons d'abord que (b) implique (a) : s'il existe un réel positif M vérifiant : $\forall x \in A, |x| \leq M$, alors
$$\forall x \in A,\ -M \leq x \leq M;$$
ainsi A est majorée par M et minorée par $(-M)$, donc elle est bornée.
- Réciproquement, supposons A bornée, c'est-à-dire majorée et minorée : cela signifie qu'il existe deux réels s et S vérifiant
$$\forall x \in A,\ s \leq x \leq S.$$
Pour trouver un réel M vérifiant $-M \leq s$ et $S \leq M$, posons : $M = \max(|s|, |S|)$.
Alors on a $S \leq |S| \leq M$, tandis que $s \geq -|s| \geq -M$.



Deux exemples possibles pour comprendre le choix de M.

Finalement,
$$\forall x \in A,\ -M \leq x \leq M.$$

□

Interprétation de la proposition. — On peut montrer qu'une partie est bornée en « majorant brutalement la valeur absolue de ses éléments ».

Exemple 1.50. — Montrons que la partie $A = \left\{(\cos(x)+3)^5,\ x \in \mathbb{R}\right\}$ est bornée. On constate :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \left|(\cos(x)+3)^5\right| &\leq |\cos(x)+3|^5 && \text{(valeur absolue d'un produit)}\\
&\leq (|\cos(x)|+3)^5 && \text{(inégalité triangulaire + croissance de } u \mapsto u^5 \text{ sur } \mathbb{R}^+)\\
&\leq (1+3)^5. && (|\cos(x)| \text{ est toujours inférieur ou égal à } 1)
\end{aligned}$$

Ainsi, tous les éléments de A ont leur valeur absolue inférieure ou égale à $4^5 = 1024$, et A est bornée.

Exercice 1.13. — Montrer que les parties suivantes sont bornées

- $A = \left\{\sin(\sqrt{n^4+3}) + \frac{(-1)^n}{n^2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$,
- $B = \left\{\frac{x+2}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}\right\}$.

6. Densité

6.1. Définition et premiers exemples. —

Définition 1.51 – Partie dense de $\mathbb{R}$

Soit U une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que U est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tous réels a, b vérifiant $a < b$, il existe un élément de U dans l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Exemple 1.52. —

1. La partie $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$: par exemple, entre 1.300 et 1.376, il n'y a aucun élément de $\mathbb{Z}$.
2. La partie $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$: si a et b sont deux réels vérifiant $a < b$, alors le nombre $\frac{a+b}{2}$ appartient à $U = \mathbb{R}$, et il est dans l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Exercice 1.14. — 1. Montrer que la partie $\mathbb{R}^\star$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Soit U une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que si U est majorée, alors il est impossible que U soit dense dans $\mathbb{R}$.

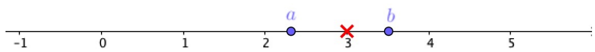
6.2. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. —

Théorème 1.53 – Densité des rationnels

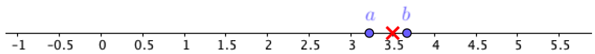
La partie $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$. Nous devons montrer qu'il existe un rationnel dans $]a, b[$.

En guise de travail préparatoire, remarquons que si l'écart $b - a$ dépasse 1, alors il y a en fait un <u>entier</u> dans $]a, b[$.

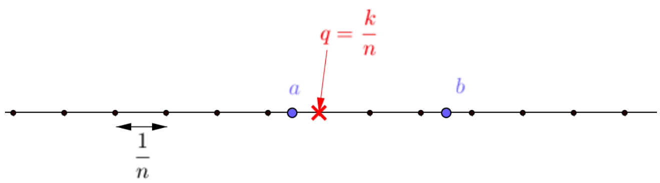


Si $(b - a) \leq 1$ mais $\frac{1}{2} < b - a$, alors il y a en fait un <u>demi-entier</u> dans $]a, b[$.



On peut alors penser que si l'écart $b - a$ est quelconque, "éventuellement très petit", on peut espérer trouver dans $]a, b[$ un rationnel avec un « grand dénominateur ».
Commençons maintenant la démonstration formelle.

Fixons un entier naturel n vérifiant : $\frac{1}{n} < (b - a)$, par exemple $n = E\left(\frac{1}{b-a}\right) + 1$.
Soit k le plus petit entier vérifiant : $\frac{k}{n} > a$, à savoir $k = E(na) + 1$.



Le nombre $q = \frac{k}{n}$ est alors rationnel : on constate qu'il appartient à $]a, b[$:
- il vérifie bien sûr $q > a$,
- et on a $k - 1 = E(na) \leq na$, donc $k \leq na + 1 \leq n\left(a + \frac{1}{n}\right) < n\left(a + (b - a)\right)$, si bien que $q < b$.

□

Exercice 1.15. — Cet exercice est conçu pour tester votre compréhension de la démonstration ci-dessus.

Dire si les parties suivantes sont denses dans $\mathbb{R}$. Deviner les trois réponses avant de rédiger des démonstrations.

(a) $U_1 = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^\star,\ q \leq 10 \right\}$,

(b) $U_2 = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^\star,\ q \text{ est une puissance de } 2 \right\}$,

(c) $U_3 = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^\star,\ 10|p| \geq q \right\}$.

6.3. Interprétation de la densité. —

Proposition 1.54 – Caractérisation de la densité en termes de voisinages

Soit U une partie de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) U est dense dans $\mathbb{R}$,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists u \in U,\ \ d(u, x) < \varepsilon$.

Ainsi, dire que U est dense dans $\mathbb{R}$,
c'est dire que tout point de la droite réelle peut être « approché d'aussi près qu'on veut » par des éléments de U.

On peut alors relier la densité de $\mathbb{Q}$ à notre habitude d'approcher des nombres réels à l'aide des développements décimaux : si x est un nombre réel, on peut l'approcher « d'aussi près qu'on veut » par des nombres *décimaux*, en tronquant le développement décimal propre de x « de plus en plus loin ».

Exercice 1.16. — Démontrer soigneusement la proposition ci-dessus (il s'agit de bien manipuler les quantificateurs).

6.4. Densité des irrationnels. — L'ensemble $\mathbb{Q}$ est l'exemple le plus célèbre de partie dense de $\mathbb{R}$, mais il y en a beaucoup d'autres. En voici un exemple.

Théorème 1.55 – Densité des irrationnels

L'ensemble $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est lui aussi dense dans $\mathbb{R}$.

***Exercice 1.17* (Démonstration guidée du théorème).** —
Soient a et b deux réels avec $a < b$. On pose $\alpha = a - \sqrt{2}$ et $\beta = b - \sqrt{2}$.

1. Dire pourquoi il existe un nombre rationnel u compris entre α et β.
2. En déduire l'existence d'un nombre irrationnel dans l'intervalle $]a, b[$.

CHAPITRE 2

SUITES DE NOMBRES RÉELS

1. Définition et premières propriétés

1.1. Suites réelles. —

Définition 2.1 – Suite de nombres réels

On appelle *suite réelle* une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$,
c'est-à-dire une application qui à chaque entier naturel associe un nombre réel.

Si u est une suite réelle et n un entier naturel, on adoptera souvent la notation u_n pour désigner l'image de n par u plutôt que la notation fonctionnelle $u(n)$. On désignera aussi souvent la suite [1] u par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$.

Suites ne commençant pas au rang zéro. — Si n_0 est un entier naturel, on se permet généralement de parler aussi de suite réelle (définie à partir du rang n_0) pour une application de $\{n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\}$ dans $\mathbb{R}$. La suite est alors notée $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Diverses façons de définir une suite. —

- On peut définir une suite u par une *formule explicite* donnant, pour chaque n, la valeur de u_n.
  Exemple : $\big(\ln(1+n^2)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Il est courant aussi de définir une suite *par récurrence*, c'est-à-dire en exprimant pour $n \geq 1$ la valeur de u_n en fonction des termes précédents $u_0, \cdots,\ u_{n-1}$. Par exemple, il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = u_{n-1}^2$.
- Mais bien sûr, il y a aussi des suites définies *plus abstraitement* : par exemple, si pour chaque n de $\mathbb{N}^\star$ on note u_n le $n^{\text{ème}}$ chiffre après la virgule dans le développement décimal de π, on obtient une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie sans aucune ambiguité (par exemple, puisque $\pi = 3.14159...$, on a $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 1$, etc), mais pas par une formule explicite ni par une relation de récurrence.

1.2. Opérations sur les suites réelles. — Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles, alors on peut définir

- la **suite somme** $u+v$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ (u+v)_n = u_n + v_n$,
- la **suite produit** uv par : $\forall n \in \mathbb{N},\ (uv)_n = u_n v_n$,
- lorsque u ne s'annule pas, la **suite inverse** $\frac{1}{u}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\frac{1}{u}\right)_n = \frac{1}{u_n}$.

Si a est un nombre réel, on définit la suite $a \cdot u$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, (a\cdot u)_n = a\ u_n$. C'est un cas particulier de suite produit où l'une des deux suites est constante.

1. Attention aux notations : l'expression « la suite n^2+1 » n'a pas de sens. On peut parler de « la suite $\big(n^2+1\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ». On peut aussi parler de « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2+1$ », mais pas de « la suite u_n définie par [...] ».

1.3. Vocabulaire sur les suites réelles. —

Définition 2.2 – Suite constante, stationnaire, périodique...

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que u est *constante* s'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a$.
- On dit que u est *stationnaire* s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \geq p, \quad u_n = a$.
- On dit que u est *périodique* s'il existe $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = u_n$. Dans ce cas on dit que p est une *période* de u.

Exemple 2.3. —

1. La suite $(\cos(2n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur 1.
2. La suite $u = \left(E(\frac{n+5}{n^2+1})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (pour $n \geq 3$, on a $u_n = 0$), mais n'est pas constante.
3. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ est périodique ; le nombre 2 en est une période.
4. Fixons quatre réels a, b, c, d. On obtient une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est 4-périodique en définissant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} a & \text{si } n \equiv 0 \mod 4, \\ b & \text{si } n \equiv 1 \mod 4, \\ c & \text{si } n \equiv 2 \mod 4, \\ d & \text{si } n \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

Définition 2.4 – Suite croissante, suite décroissante, suite monotone

Soit u une suite réelle.

- On dit que u est *croissante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$.
- On dit que u est *strictement croissante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$.
- On dit que u est *décroissante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$
- On dit que u est *strictement décroissante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.
- On dit que u est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Rappelons que parmi les approches classiques pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut chercher à calculer $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et étudier son signe, ou, *uniquement lorsque la suite est strictement positive*, calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et chercher à le comparer à 1.

Définition 2.5 – Suite majorée, minorée, bornée

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est

- majorée s'il existe un réel M vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M$.
- minorée s'il existe un réel m vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m$.
- bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

On remarquera que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée, minorée, bornée si et seulement si l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est. Les résultats du chapitre 1 ont donc bien sûr des conséquences pour les suites. Voici un exemple.

Proposition 2.6 – Vérifier qu'une suite est bornée en majorant la valeur absolue

Une suite u est bornée si et seulement s'il existe un réel M vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.

De plus, l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ étant toujours non vide [2], on peut définir

- lorsque (u_n) est majorée, le *supremum* de u comme $\sup(u) = \sup\{u_n,\ n \geq 0\}$ (aussi noté $\sup_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$) ;
- lorsque (u_n) est minorée, l'*infimum* de u comme $\inf(u) = \inf\{u_n,\ n \geq 0\}$ (aussi noté $\inf_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$) ;
- lorsque $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus grand élément, le *maximum* de u comme $\max(u) = \max\{u_n,\ n \geq 0\}$;
- lorsque $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément, le *minimum* de u comme $\min(u) = \min\{u_n,\ n \geq 0\}$.

Définition 2.7 – Expression « à partir d'un certain rang »

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\mathcal{P}$ une propriété.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\mathcal{P}$ **à partir d'un certain rang** s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $(u_n)_{n\geq p}$ vérifie $\mathcal{P}$.

Exemple 2.8. — La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-10+n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang (du rang 10).

Exemple 2.9. — La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{(1000)^n}{(n!)})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang [3].

2. Limite

2.1. Définition et premiers exemples. —

Définition 2.10 – Définition de la limite avec les ε, pour les suites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un nombre réel. On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Notations. — Pour résumer l'expression « (u_n) converge vers ℓ », on peut écrire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Si on sait déjà que (u_n) *converge* et si on veut dire que sa limite est le nombre ℓ, on peut écrire : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Attention. — Pour pouvoir utiliser la notation $\lim_{n\to\infty} u_n$, il est indispensable d'avoir déjà prouvé la convergence de la suite u.

Remarque 2.11. — On constate sur la définition qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel ℓ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)_{n\geq 0}$ converge vers 0. C'est parfois utile dans la pratique.

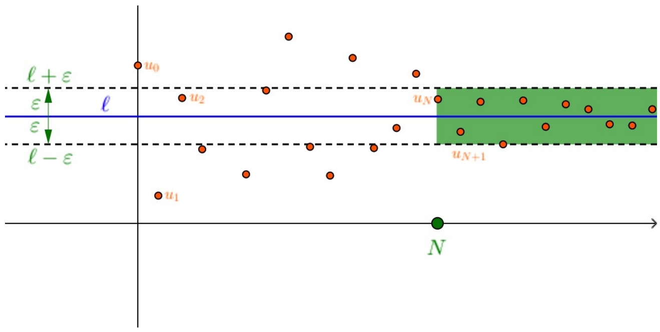
Commentaire sur la définition. — Rappelons que que $|u_n - \ell|$ désigne la distance entre u_n et ℓ.
L'expression « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ » signifie donc :

« *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *même arbitrairement petit, la distance entre* u_n *et* ℓ *finira à partir d'un certain rang par rester* $< \varepsilon$. »

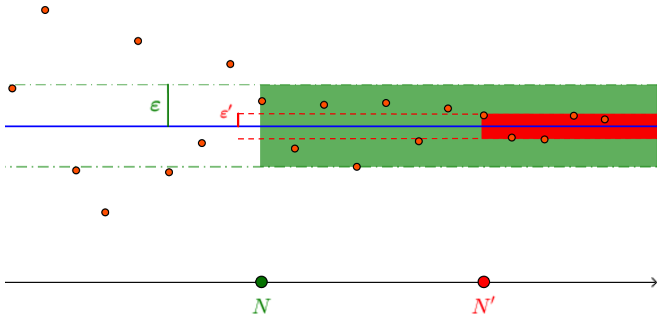
ou encore

« *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *on aura* $u_n \in]\ell+\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ *à partir d'un certain rang.* »

2. Puisqu'il contient u_0.
3. En effet, elle est strictement positive et pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1000}{n+1}$. On constate que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout $n \geq 1000$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir du rang 1000.



On constate que le rang en question dépend en général de ε : de manière vague, on peut penser que typiquement, « *plus ε est petit, plus il faudra attendre un grand rang N avant de voir la distance entre u_n et ℓ rester systématiquement $< \varepsilon$* ».



***Exemple 2.12* (Un cas concret).** — Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers zéro.

- Soit $\varepsilon > 0$.

  On cherche à trouver $N \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant : pour tout $n \geq N$, $|u_n - 0| < \varepsilon$.
  Or, $|u_n - 0| < \varepsilon$ signifie $\frac{1}{n} < \varepsilon$, c'est-à-dire $n > \frac{1}{\varepsilon}$: mais nous savons à partir de quel entier cette inégalité est vérifiée...

- Choisissons $N = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$.
- Pour chaque $n \geq N$, on a alors :

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}. \quad \text{Mais} \quad N > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

  Ainsi,

$$\forall n \geq N, \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

- Nous avons bien vérifié la définition de la convergence : $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers zéro.

***Exemple 2.13* (Une vérification abstraite).** — Soit ℓ un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers ℓ. Montrons que la suite $(7u_n + 12)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $7\ell + 12$.

- Nous devons montrer l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |(7u_n + 12) - (7\ell + 12)| < \varepsilon.$$

- Soit $\varepsilon > 0$.

  À partir de maintenant, ε est donc fixé, ne peut pas « bouger », c'est avec lui que nous devons travailler.
  Nous devons montrer qu'on a $|(7u_n + 12) - (7\ell + 12)| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang,
  c'est-à-dire : $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{7}$ à partir d'un certain rang.
  Ceci est garanti par la convergence de (u_n), mais à condition d'utiliser la définition de la limite avec $\frac{\varepsilon}{7}$.

- Comme (u_n) converge vers ℓ, on sait [4] qu'il existe un entier N de $\mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{7}$.
- Pour chaque $n \geq N$, on a alors :

$$|(7u_n + 12) - (7\ell + 12)| = |7u_n - 7\ell| = 7\,|u_n - \ell| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7}, \quad \text{donc} \quad |(7u_n + 12) - (7\ell + 12)| < \varepsilon, \quad CQFD.$$

Remarque 2.14. — Dans les deux exemples ci-dessous, c'est la *phase de recherche au brouillon* qui a permis de démarrer :

- dans l'exemple concret, pour trouver un rang N convenant, nous avons étudié « au brouillon » la condition cherchée sur u_n . S'il n'y avait pas eu la recherche au brouillon, le choix de $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ aurait semblé « magique ».
- dans l'exemple abstrait, nous avons analysé ce qu'il fallait montrer pour comprendre comment utiliser à bon escient l'hypothèse « (u_n) converge vers ℓ ». S'il n'y avait pas eu le brouillon, le choix de $\frac{\varepsilon}{7}$ pour utiliser l'hypothèse aurait semblé « magique ».

***Exercice 2.1* (Manipulation de la définition).** —

1. Vérifier que la suite $\left(\frac{5}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers zéro.
2. Vérifier que la suite $(\frac{n+8}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers zéro. Montrer que la suite $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro.

Il existe des suites qui n'ont pas de limite. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un nombre réel.
En niant la définition, l'affirmation « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ » s'écrit avec des quantificateurs :

$$\exists\varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N, \quad |u_n - \ell| \geq \varepsilon.$$

Pour dire qu'une suite n'a pas de limite, on est obligé de dire qu'elle ne converge vers aucun réel : ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, l'affirmation « u n'est pas convergente » s'écrit avec des quantificateurs :

$$\forall\ell \in \mathbb{R}, \quad \exists\varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq N, \quad |u_n - \ell| \geq \varepsilon.$$

C'est peu commode et, en pratique, nous ne reviendrons que rarement à la définition lorsqu'il s'agira de montrer qu'une suite n'est pas convergente. Voici cependant un exemple.

***Exemple 2.15* (Vérification directe de l'absence de limite).** — Montrons que la suite u définie par

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = (-1)^n$$

n'a pas de limite.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Si (u_n) convergeait vers ℓ, pour chaque $\varepsilon > 0$, u_n serait à partir d'un certain rang confiné à l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$;
l'écart entre deux termes de u_n resterait donc strictement inférieur à la largeur de l'intervalle, qui est 2ε.
Comme l'écart entre deux termes consécutifs de u_n est de 1, on peut penser que ce n'est pas possible si $2\varepsilon = 1$...

- Choisissons $\varepsilon = 1/2$.
- Soit $N \in \mathbb{N}$. Notre but est de montrer qu'il existe un entier $n \geq N$ vérifiant : $|u_n - \ell| \geq 1/2$.
- Comme des deux entiers N et $N + 1$ l'un est pair et l'autre est impair, on a $|u_N - u_{N+1}| = 1$, mais en utilisant l'inégalité triangulaire on obtient :

$$1 = |u_N - u_{N+1}| \leq |u_N - \ell| + |u_{N+1} - \ell|.$$

  On en déduit qu'on a soit $|u_N - \ell| \geq 1/2$, soit $|u_{N+1} - \ell| \geq 1/2$.
  Il existe donc bien un entier n vérifiant $|u_n - \ell| \geq 1/2$ (l'un des deux choix $n = N$ ou $n = N + 1$ convient).

Sur cet exemple, nous avons réussi à vérifier la négation de « u est convergente » mais il est rare que cette vérification soit aussi accessible. Nous verrons plus loin (p. 43) une méthode beaucoup plus pratique pour montrer en pratique qu'une suite ne converge pas.

4. En effet, en tenant compte du fait que les variables sont muettes dans la définition de la limite, dire que (u_n) converge vers ℓ, c'est dire : « $\forall\delta > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \delta$ » : on peut utiliser cela avec $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$.

Vocabulaire : suite divergente. — On dit qu'une suite *diverge* si elle n'est pas convergente. *Diverger signifie donc simplement « ne pas converger »* (vers un nombre fini).

Certaines suites divergentes ont la particularité de « tendre vers l'infini » ; nous verrons au numéro 2.2.3 ce que cela signifie précisément.

2.2. Propriétés élémentaires. —

Proposition 2.16 – Unicité de la limite

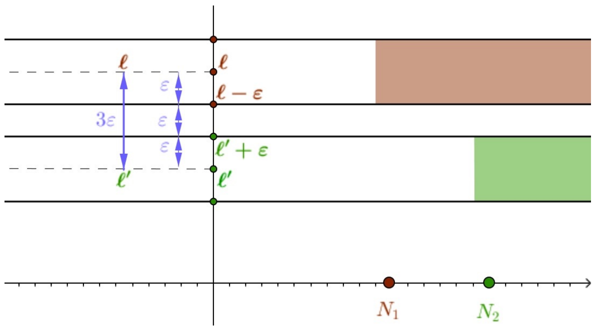
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle ; soient ℓ, ℓ' deux réels. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.

Démonstration. — Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons $\ell \neq \ell'$.
Choisissons $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{3}$ pour appliquer la définition de la convergence. Comme $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[.$$

Comme $(u_n)_{n\geq 0}$ converge aussi vers ℓ', il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad u_n \in]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[.$$



À partir du rang N_1, u_n devrait se situer dans la bande brune ; à partir du rang N_2, u_n devrait se situer dans la bande verte.

Ces contraintes sont incompatibles : observer la situation pour un entier n vérifiant à la fois $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$ va mener à une contradiction...

Considérons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Comme $N \geq N_1$, on a $|u_N - \ell| < \varepsilon$; comme $N \geq N_2$, on a $|u_N - \ell'| < \varepsilon$. Mais alors

$$|\ell-\ell'| \leq |\ell-u_N| + |u_N-\ell'| < \varepsilon+\varepsilon = 2\frac{|\ell-\ell'|}{3}.$$

Si $\ell' \neq \ell$ alors $|\ell-\ell'| > 0$ et, en simplifiant, on obtient $1 < \frac{2}{3}$: c'est absurde.

□

Proposition 2.17 – Convergente $\Longrightarrow$ bornée

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. — Soient ℓ un nombre réel et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite convergeant vers ℓ. La définition de la convergence s'écrit

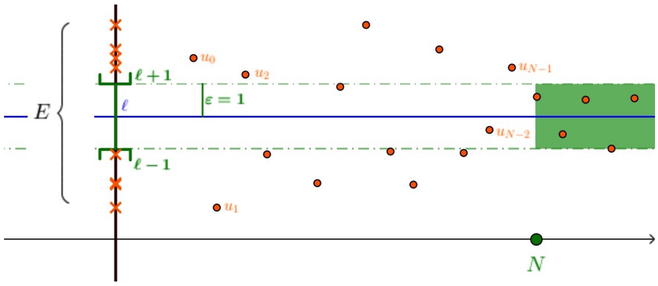
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[. \qquad (\star)$$

Appliquons $(\star)$ avec $\varepsilon = 1$ (cette valeur est choisie « au hasard »).
On obtient l'existence d'un N de $\mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \geq N, \quad u_n \in]\ell-1, \ell+1[$. Si nous notons

$$E = \quad \{u_0, u_1, ..., u_{N-1}\} \quad \cup \quad]\ell-1, \ell+1[$$

on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in E.$$



Il suffit donc de montrer que E est borné pour pouvoir conclure. Or, notons

$$M = \max\left(|u_0|, |u_1|, ..., |u_{N-1}|, |\ell-1|, |\ell+1|\right).$$

On constate que : $\forall x \in E, \quad |x| \leq M$. Cela montre que E est borné, donc que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est, comme voulu.

□

Remarque 2.18. — Au cours de la démonstration, nous avons constaté le fait suivant : si une suite est bornée à partir d'un certain rang, elle est en fait bornée (« tout court »). En conséquence, l'expression « suite bornée à partir d'un certain rang » n'a pas beaucoup de sens ou, en tout cas, d'intérêt.

Proposition 2.19 – Produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers zéro

Si u est une suite bornée et v une suite qui converge vers zéro, alors la suite uv converge vers zéro.

Démonstration. — Nous devons vérifier l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n v_n| < \varepsilon.$$

- Soit $\varepsilon > 0$.
- Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe un réel $M > 0$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

- Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro, en appliquant la définition de la convergence, il existe N de $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geq N, \quad |v_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

  Mais alors pour tout $n \geq N$, on a : $|u_n v_n| = \underbrace{|u_n|}_{<\frac{\varepsilon}{M}} \underbrace{|v_n|}_{\leq M} < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M$, donc pour chaque $n \geq N$ on a : $|u_n v_n| < \varepsilon$, comme voulu.

□

Proposition 2.20 – limite non nulle et signe

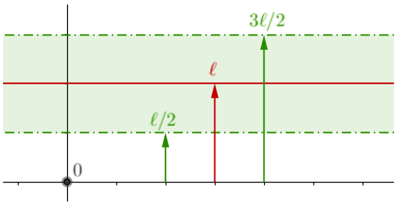
Soit $\ell \neq 0$. Si une suite u converge vers ℓ avec $l > 0$, alors u est strictement positive à partir d'un certain rang. Si une suite u converge vers ℓ avec $l < 0$, alors u est strictement négative à partir d'un certain rang. Dans les deux cas

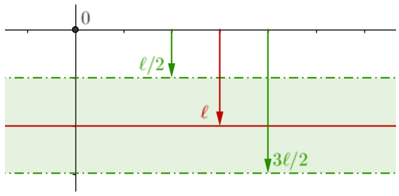
$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n > 0.$$

Démonstration. — On applique la définition de la convergence (« *avec* $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$ »). On sait qu'il existe un entier n_0 vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \ u_n \in \left]\ell - \frac{|\ell|}{2}, \quad \ell + \frac{|\ell|}{2}\right[.$$

Si $\ell > 0$, on a $\left]\ell - \frac{|\ell|}{2},\ \ \ell + \frac{|\ell|}{2}\right[= \left]\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}\right[$, tandis que si $\ell < 0$, on a $\left]\ell - \frac{|\ell|}{2},\ \ \ell + \frac{|\ell|}{2}\right[= \left]\frac{3\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right[$.





Dans les deux cas, l'intervalle $\left]\ell - \frac{|\ell|}{2},\ \ \ell + \frac{|\ell|}{2}\right[$ ne contient pas zéro, donc on a bien $u_n \neq 0$ à partir du rang n_0 et le signe de u_n dépend du signe de l.

□

2.3. Limite infinie. —

Définition 2.21 – Suite qui tend vers $+\infty$

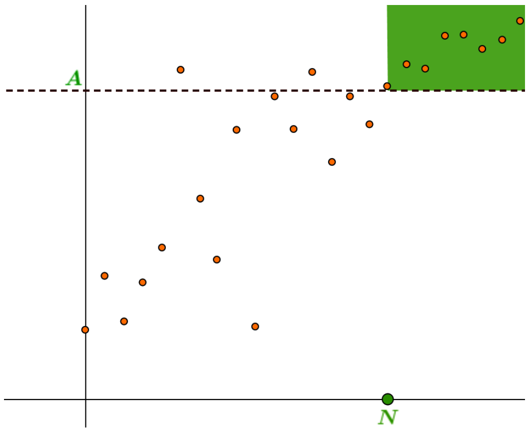
On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$ lorsqu'elle vérifie :

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n > A.$$

Notations. — Pour résumer l'expression « (u_n) converge vers ℓ », on peut écrire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Commentaire sur la définition. — Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, c'est dire que

« Pour tout $A > 0$, même arbitrairement grand, on aura $u_n > A$ à partir d'un certain rang. »



Comme pour le cas des suites convergentes, le rang en question dépend en général de A.

Exemple 2.22 **(Un cas concret).** — Montrons que la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

- Soit $A > 0$.

  On aimerait montrer que pour n assez grand on a $u_n > A$, autrement dit $\sqrt{n} > A$, ou encore $n > A^2$.
  Mais nous connaissons les entiers vérifiant cette condition : ce sont ceux qui sont au-delà de $E(A^2) + 1$...
- On pose $N = E(A^2) + 1$.
- On a alors $N > A^2$, donc :

$$\forall n \geq N, \quad \sqrt{n} \geq \sqrt{N} > \sqrt{A^2} = A.$$

- Nous avons montré que $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exemple 2.23 **(Une vérification abstraite).** — Soit u une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Montrons que $\ln(u)$ est bien définie à partir d'un certain rang et tend vers $+\infty$.

- Pour montrer que $\ln(u)$ est bien défini à partir d'un certain rang, on doit montrer que u_n reste strictement positif à partir d'un certain rang. Nous savons que

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \quad u_n > A. \tag{$\star$}$$

Appliquons ($\star$) avec $A = 0.37$ (cette valeur est choisie « au hasard ») : on en déduit l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n > 0.37.$$

En particulier, pour tout $n \geq n_0$, u_n est strictement positif et $\ln(u_n)$ est bien défini.

- Montrons que la suite $(\ln(u_n))_{n \geq n_0}$ tend vers $+\infty$.

$\rightsquigarrow$ Soit $A > 0$.

On aimerait montrer que pour n assez grand on a $\ln(u_n) > A$, autrement dit $u_n > e^A$.
Cela invite à utiliser la définition de la limite avec e^A plutôt qu'avec A...

$\rightsquigarrow$ Compte tenu de la définition de la limite, on sait qu'il existe un N de $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \geq N, \quad u_n > e^A.$$

$\rightsquigarrow$ Mais alors pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$, CQFD.

Exercice 2.2. — 1. Vérifier que la suite $(\sqrt{n} - 5)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

2. Vérifier que la suite $(\frac{n^2+1}{n})_{n \in \mathbb{N}^\star}$ tend vers $+\infty$.
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Montrer que la suite $(e^{u_n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers zéro et dont tous les termes sont strictement positifs. Montrer que la suite $(\frac{1}{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Il y a bien sûr une définition analogue pour « tendre vers $-\infty$:

Définition 2.24 – Suite qui tend vers $-\infty$

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $-\infty$ lorsqu'elle vérifie :

$$\forall A < 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \quad u_n < A.$$

Attention : ne pas confondre « diverger » et « tendre vers $\pm\infty$ » . — . La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, mais n'a pas de « limite infinie ».

3. Opérations sur les limites

Dans les numéros **2.3**, **2.4** et **2.5**, on démontre les résultats classiques permettant de manipuler les limites de la manière à laquelle vous êtes habitués. L'important n'est pas de retenir les résultats (vous les connaissez déjà), mais de comprendre les démonstrations : elles contiennent beaucoup d'idées utiles pour manipuler la définition abstraite de la limite dans des situations variées.

Proposition 2.25 – Opérations sur les limites, cas de limites finies

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles et ℓ, ℓ' deux réels. Si u et v convergent respectivement vers ℓ et ℓ', alors

(a) la suite $(u+v)$ converge vers $\ell+\ell'$,

(b) la suite uv converge vers $\ell\ell'$.

(c) Si de plus $\ell \neq 0$, alors :

(i) la suite $\frac{1}{u}$ est bien définie à partir d'un certain rang,

(ii) la suite $\frac{1}{u}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

Démonstration. —

(a) • Soit $\varepsilon > 0$.

Nous devons montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $|(u_n+v_n)-(\ell+\ell')| < \varepsilon$.
Or $|(u_n+v_n)-(\ell+\ell')| = |(u_n-\ell)+(v_n-\ell')|$ et l'inégalité triangulaire donne :
$|(u_n-\ell)+(v_n-\ell')| \leq |u_n-\ell|+|v_n-\ell'|$.
Pour que le second membre soit $< \varepsilon$, il ne suffit PAS de savoir que $|u_n-\ell| < \varepsilon$ et $|v_n-\ell'| < \varepsilon$.
En revanche, il suffit de savoir que $|u_n-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n-\ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$...
ce qui est garanti à partir d'un certain rang par la définition de la convergence.

• La définition de la convergence nous assure l'existence de deux entiers naturels N_1 et N_2 vérifiant :

$$\forall n \geq N_1, \qquad |u_n-\ell| < \frac{\varepsilon}{2} \ ;$$
$$\forall n \geq N_2, \qquad |v_n-\ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

*Un entier n vérifie ($n \geq N_1$ **et** $n \geq N_2$) si et seulement s'il vérifie $n \geq \max(N_1,N_2)$.*
C'est donc à partir du rang $\max(N_1,N_2)$ que les deux conditions ci-dessus sont vérifiées.

• Posons $N = \max\{N_1,N_2\}$. On a alors

$$\forall n \geq N, \quad |(u_n+v_n)-(\ell+\ell')| = |(u_n-\ell)+(v_n-\ell')| \leq |u_n-\ell|+|v_n-\ell'| < \varepsilon.$$

C'est bien ce que l'on voulait montrer.

(b) On remarque l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_nv_n - \ell\ell' = u_nv_n - \ell v_n + \ell v_n - \ell\ell'.$$

En réarrangeant, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_nv_n - \ell\ell' = (u_n-\ell)\cdot v_n + (v_n-\ell')\cdot \ell.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(u_n-\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro, donc la suite $((u_n-\ell)\cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro (voir page 32). Par ailleurs $(v_n-\ell')_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers zéro et la suite constante $(\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $((v_n-\ell')\cdot\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro. Par somme (en utilisant (a)), $(u_nv_n-\ell\ell')_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro, CQFD.

(c) (i) Par la proposition 2.20 $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et donc que $\frac{1}{u_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang,

(ii) Supposons, quitte à remplacer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ce qui suit, que ℓ soit strictement positif.

- Soit $\varepsilon > 0$. Nous voulons montrer qu'à partir d'un certain rang on a : $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| < \varepsilon$. Or

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{u_n - \ell}{u_n \cdot \ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| \cdot \ell}.$$

Pour que la fraction soit « petite », il serait bien que le numérateur soit « petit » et que le dénominateur « ne soit pas trop proche de zéro ». La première condition va être fournie par la définition de la convergence ; pour la deuxième le point (i) nous fournit une indication.

- Nous venons de voir qu'il existe un rang n_0 vérifiant : $\forall n \geq n_0,\ u_n \in \left]\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}\right[$.
  En particulier $u_n > \frac{\ell}{2}$ pour $n \geq n_0$, donc

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| \cdot \ell} \leq \frac{|u_n - \ell|}{\ell^2/2}.$$

- En utilisant la définition de la convergence (« *pour l'écart* $\varepsilon \cdot \ell^2/2$ »), on sait qu'il existe un rang n_1 vérifiant :

$$\forall n \geq n_1, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon \cdot \ell^2/2.$$

- Posons alors $N = \max(n_0, n_1)$. Il vient :

$$\forall n \geq N, \quad \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{u_n - \ell}{u_n \cdot \ell}\right| < \frac{|u_n - \ell|}{\ell^2/2} < \frac{\varepsilon \cdot \ell^2/2}{\ell^2/2},$$

  nous avons donc bien vérifié

$$\forall n \geq N, \quad \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| < \varepsilon,$$

  c'est ce qu'il fallait démontrer.

□

Corollaire 2.26 – Une remarque utile

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles et ℓ un nombre réel. On suppose que
- *la suite u converge vers ℓ,*
- *la suite $v - u$ converge vers 0.*

Alors la suite v converge vers ℓ.

Démonstration. — Il suffit de remarquer l'égalité de suites : $v = u + (v - u)$ et d'appliquer le théorème précédent. □

Nous allons maintenant nous intéresser au cas où au moins une des deux limites est infinie.

Proposition 2.27 – Opérations sur les limites, cas de limites infinies

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles.
- *Si u tend vers $+\infty$ et v est minorée, alors $u+v$ tend vers $+\infty$.*
- *Si u tend vers $+\infty$ et s'il existe $a>0$ vérifiant : $v_n \geq a$ à partir d'un certain rang, alors uv tend vers $+\infty$.*
- *Si u tend vers $+\infty$ et s'il existe $a<0$ vérifiant : $v_n \leq a$ à partir d'un certain rang, alors uv tend vers $-\infty$.*
- *Si u tend vers $+\infty$, alors*
  — *u est strictement positive à partir d'un certain rang, donc $\frac{1}{u}$ est bien définie à partir d'un certain rang,*
  — *de plus, $\frac{1}{u}$ converge vers zéro.*
- *Si u converge vers zéro et si $\frac{1}{u}$ est bien définie, alors $\frac{1}{|u|}$ tend vers $+\infty$.*
  Dans le cas où u_n est positif (resp. négatif) à partir d'un certain rang, $\frac{1}{u}$ tend en fait vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Nous ne montrons qu'une seule de ces propriétés, la deuxième. Vérifier que vous savez adapter les idées de la démonstration précédente pour le cas des limites infinies est probablement un excellent exercice.

Démonstration de la deuxième propriété. —
- Supposons que u tende vers $+\infty$ et qu'il existe $a>0$ vérifiant : $v_n \geq a$ à partir d'un certain rang.
  Montrons que uv tend vers $+\infty$.
- Soit $A>0$.

On aimerait montrer que $u_n v_n > A$ à partir d'un certain rang ;
or on sait que $v_n \geq a > 0$ à partir d'un certain rang, donc à partir d'un certain rang : $u_n v_n \geq u_n \cdot a$.
Si on savait que : $u_n \cdot a > A$ à partir d'un certain rang, nous aurions gagné.
Nous savons donc comment démarrer...

- On observe que $\frac{A}{a}$ est strictement positif ; compte tenu de ce que signifie l'hypothèse « u tend vers $+\infty$ », il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ vérifiant :
$$\forall n \geq N_1, \quad u_n > \frac{A}{a}.$$
- De plus, on sait que $v_n \geq a$ à partir d'un certain rang ; autrement dit, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \geq N_2,\ v_n \geq a > 0$.
- Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. On a bien
$$\forall n \geq N, \quad u_n v_n \geq u_n \cdot a > \frac{A}{a} \cdot a,$$
  donc : $\forall n \geq n, \quad u_n v_n > A$.

□

4. Formes indéterminées, croissances comparées

Parfois la connaissance de la limite des différentes suites d'une expression ne permet pas de déduire la limite de l'expression. On parle de **formes indéterminées**. Cela a déjà été vu dans le cours de pré-rentrée « Calcul » mais nous rappelons, à toutes fins utiles, les situations d'indétermination :

$$« (\infty) - (\infty) », \quad « 0 \times \infty », \quad « \frac{0}{0} », \quad « \frac{\infty}{\infty} », \quad « 1^{\infty} ». \tag{4.1}$$

Exercice 2.3. — Étudier la convergence des suites
$\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{2n^2-1}{7+3n+8n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(n \cdot \sin(\frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $\left(\frac{E(1/n)}{e^{1-n^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Les divers théorèmes de croissances comparées (déjà vus dans le cours « Calcul » de la pré-rentrée) permettent de lever les indéterminations dues au produit ou quotient de fonctions exponentielles, puissances ou logarithmes. Voici une forme très synthétique qui unifie les divers cas de figure.

Théorème 2.28 – Croissances comparées

- *Si a est un réel non nul et b, c sont des réels quelconques, alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} e^{an} n^b \ln^c n = \lim_{n\to+\infty} e^{an}$$

- *Si b est un réel non nul et c est un réel quelconque, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} n^b \ln^c n = \lim_{n\to+\infty} n^b.$$

Remarque 2.29. — On peut résumer les conclusions par le slogan suivant :

Le comportement est déterminé en priorité par l'exponentielle, puis par la puissance, puis à défaut par le logarithme.

5. Théorèmes de comparaison

5.1. Passage à la limite dans une inégalité. —

Proposition 2.30 – Passage à la limite dans les inégalités

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergeant respectivement vers deux réels ℓ et ℓ'.
On suppose de plus qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n$.
Alors $\ell \leq \ell'$.

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde et supposons $\ell > \ell'$.
Nous reprenons la stratégie de la démonstration de l'unicité de la limite, page 31.

Choisissons $\varepsilon = \frac{\ell-\ell'}{3}$. D'après la définition de la convergence de u et v, il existe des entiers $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ vérifiant :

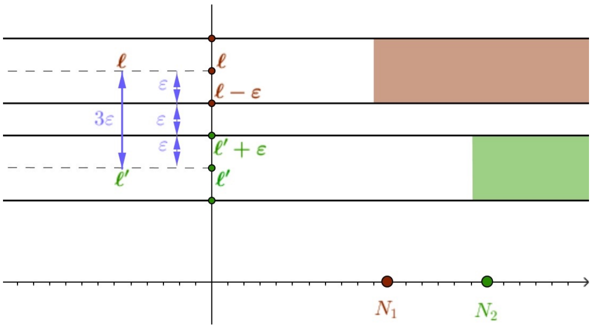
$$\forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq N_2, \quad |v_n - \ell'| < \varepsilon.$$

Par ailleurs, d'après l'hypothèse de comparaison, il existe un entier $N_3 \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \geq N_3, \quad u_n \leq v_n.$$

Observons la figure ci-contre.
À partir du rang N_1, u_n devrait se situer dans la bande brune ; à partir du rang N_2, v_n devrait se situer dans la bande verte.

On voit mal comment on pourrait avoir $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang...



On pose $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. On a alors : $\begin{cases} \ell - \varepsilon < u_N & (\text{puisque } N \geq N_1) \\ u_N \leq v_N & (\text{puisque } N \geq N_3) \\ v_N < \ell' + \varepsilon & (\text{puisque } N \geq N_2). \end{cases}$.

On en déduit que $\ell - \varepsilon < \ell' + \varepsilon$, ou encore $2\varepsilon > \underbrace{(\ell - \ell')}_{=3\varepsilon}$, c'est-à-dire $2\varepsilon > 3\varepsilon$, ce qui est absurde. □

Corollaire 2.31 – Passage à la limite dans une majoration

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle convergente, ℓ sa limite. Soit a un nombre réel.
Si à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq a$, *alors :* $\ell \leq a$.

Démonstration. — Appliquer la proposition précédente en prenant pour v la suite constante de valeur a. □

Attention avec les inégalités strictes. — Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, on ne peut absolument pas en déduire $\ell < \ell'$: songer à $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et à la suite nulle.

Les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite, mais sont converties en inégalités larges.

5.2. Détermination de limite par comparaison ou encadrement. —

Théorème 2.32 – Théorème d'encadrement

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et ℓ un nombre réel.
On suppose : $\forall n \geq 0, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi converge vers ℓ.

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. La définition de la convergence nous assure l'existence de $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \geq N_2,\ |w_n - \ell| < \varepsilon.$$

Choisissons alors $N = \max\{N_1, N_2\}$. Pour tout $n \geq N$, on a

$$\begin{cases} u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\\ v_n \geq u_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} w_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\\ v_n \leq w_n \end{cases}$$

d'où l'on déduit $v_n > \ell - \varepsilon$ et $v_n < \ell + \varepsilon$, si bien que $v_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ pour tout $n \geq N$. □

Proposition 2.33 – Théorème de comparaison, cas de limites infinies

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose :
- *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$;*
- *à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.*

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. — Soit $A > 0$. Compte tenu de ce que signifie l'hypothèse « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \geq N_1, \quad u_n > A.$$

Par ailleurs, dire qu'on a $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, c'est dire qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \geq N_2, \quad v_n \geq u_n.$$

On pose alors $N = \max\{N_1, N_2\}$; d'après ce qui précède, on a bien :

$$\forall n \geq N, \quad v_n \geq u_n > A.$$

□

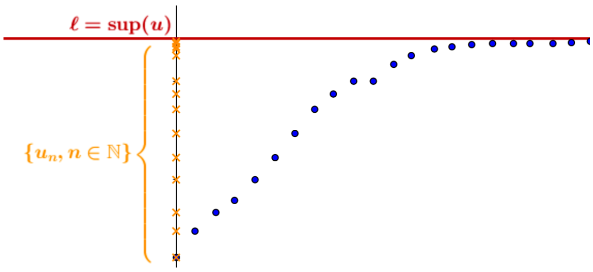
6. Deux théorèmes assurant l'existence d'une limite sans donner sa valeur

6.1. Suites croissantes majorées. — Le théorème suivant est tout à fait fondamental.

Théorème 2.34 – Les suites croissantes et majorées convergent

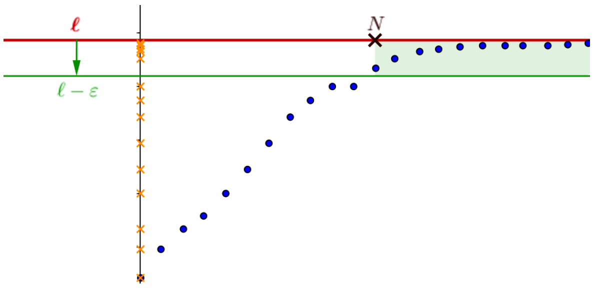
Toute suite croissante majorée est convergente.

Démonstration. — Soit u une suite croissante majorée. L'ensemble $\{u_n,\ n \geq 0\}$ est non vide et majoré ; il admet donc une borne supérieure.



Notons $\ell = \sup(u)$. Nous allons montrer que u converge vers ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. La définition de la borne supérieure nous assure qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq \ell - \varepsilon$. Comme u est croissante,

$$\forall n \geq N, \quad u_n \geq u_N \geq \ell - \varepsilon.$$



Par ailleurs, ℓ est un majorant de $\{u_n,\ n \geq 0\}$ donc pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq \ell$. Finalement

$$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell.$$

Mais alors :

$$\forall n \geq N, \quad u_n \in \,]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\,, \qquad \text{autrement dit,} \qquad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

□

La démonstration contient une idée très importante :

Pour une suite croissante majorée, la limite est donnée par le supremum.

Remarque 2.35. — Si u est croissante et converge vers ℓ, alors $\ell = \sup(u)$, en particulier ℓ est un majorant de u. Ainsi

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers ℓ, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell$.

Suites décroissantes minorées. — Sans surprise, l'analogue du résultat précédent est vrai : toute suite décroissante minorée converge (et la limite est donnée par la borne inférieure de l'ensemble des valeurs prises par la suite).

6.2. Suites adjacentes. —

Définition 2.36 – Suites adjacentes

Soient u et v deux suites réelles. On dit que u et v sont adjacentes lorsque
- l'une des deux est croissante et l'autre est décroissante,
- la suite $v - u$ converge vers 0.

Théorème 2.37 – Théorème sur les suites adjacentes

Soient u et v deux suites adjacentes. Alors u et v convergent et ont la même limite.

Démonstration. — Supposons que u soit croissante et v décroissante. La suite $v-u$ est alors décroissante et elle converge vers 0, donc elle est positive (voir la remarque 2.35 page 41). Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq u_n.$$

De plus, la suite (v_n) est décroissante, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_0 \geq v_n.$$

On en déduit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée (par v_0). Comme u est également croissante, on en déduit qu'elle converge. Comme $(v-u)$ tend vers zéro, on en déduit que v converge et a la même limite (voir le corollaire 2.26 page 36). □

Remarque 2.38. — Soient u et v deux suites adjacentes avec u croissante et v décroissante. Leur limite commune est donnée par

$$\ell = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \inf\{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 0, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

7. Notion de suite extraite

7.1. Définition. —

Définition 2.39 – Extraction

Lorsque φ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante, on dit que φ est une extraction.

donner une extraction, c'est se donner

- un entier naturel $\varphi(0)$,
- un entier $\varphi(1)$, avec la contrainte que $\varphi(1)$ soit strictement supérieur à $\varphi(0)$,
- un entier $\varphi(2)$, avec la contrainte que $\varphi(2)$ soit strictement supérieur à $\varphi(1)$ (donc aussi à $\varphi(0)$),
- et ainsi de suite, sans jamais s'arrêter : il faut bien que $\varphi(9999999)$ ait un sens, etc.

La « liste » $(\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(999), ...)$ est donc une *liste infinie d'entiers naturels rangés par ordre croissant.*

Proposition 2.40 – Une propriété utile vérifiée par les extractions

Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extraction, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$.

Démonstration. — Nous allons raisonner par récurrence sur n.

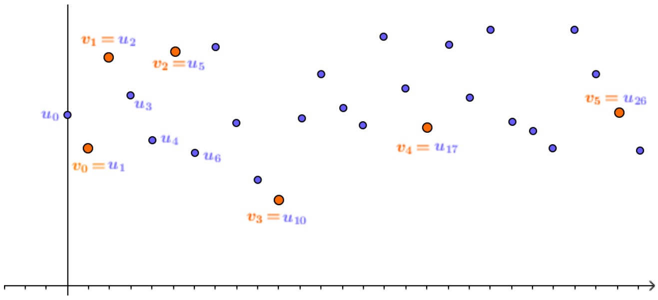
- Puisque $\varphi(0)$ est un entier naturel, on a bien $\varphi(0) \geq 0$.
- Soit n un entier naturel. Supposons $\varphi(n) \geq n$.
  Le nombre $\varphi(n+1)$ vérifie : $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, car φ est strictement croissante.
  De plus $\varphi(n+1)$ et $\varphi(n)$ sont des entiers, donc de $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ on peut déduire : $\varphi(n+1) \geq \varphi(n)+1$.
  Grâce à l'hypothèse de récurrence $\varphi(n) \geq n$, on en déduit : $\varphi(n+1) \geq (n+1)$, comme voulu.

□

Définition 2.41 – Suite extraite

Soit u une suite réelle. On appelle suite *extraite de* u, ou *sous-suite de* u, toute suite de la forme $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, où φ est une extraction.

Par exemple, l'application $\varphi : n \mapsto n^2+1$ (de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) est une extraction ; la sous-suite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite dont les termes sont : u_1, u_2, u_5, u_{10}, u_{17}, etc.



Une sous-suite de (u_n) est obtenue en sélectionnant une infinité de termes de (u_n), dans l'ordre, mais « pas forcément tous ». Si $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extraction, alors :
$\varphi(0)$ est l'indice du premier terme de u conservé dans la suite v,
$\varphi(1)$ l'indice du deuxième terme de u conservé dans la suite v, etc.

***Exemple 2.42* (Sous-suite des termes d'indice pair).** — Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Considérons l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi(k) = 2k$. Elle est strictement croissante, donc c'est une extraction ; la suite extraite de u qui lui correspond est la suite $v = (u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k = u_{2k}$. Ses termes sont u_0, u_2, u_4, u_6, etc.

***Exemple 2.43* (Sous-suite des termes d'indice impair).** — De même, on peut associer à toute suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sous-suite $v = (u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$
dont les termes sont u_1, u_3, u_5, u_7, etc.

***Exemple 2.44* (Oubli des premiers termes).** — Fixons un élément n_0 de $\mathbb{N}$. Considérons l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi(k) = k + n_0$. C'est une extraction ; si u est une suite réelle, la suite extraite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ n'est autre que la suite $(u_{n+n_0})_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont u_{n_0}, u_{n_0+1}, u_{n_0+2}, etc : la suite v est la version de la suite u où on « oublie les termes d'indice $\leq n_0$. En particulier, pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ peut être vue comme une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2.4. — Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = n^2 - 1$.
Soit v la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = 9n^2 + 6n$. Vérifier que v est une suite extraite de u.
Soit w la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \ w_n = 3n^2$. La suite w est-elle une suite extraite de u ?

7.2. Suites extraites d'une suite convergente ; applications à l'étude de suites divergentes. —

Proposition 2.45 – Cas des suites extraites d'une suite convergente

Soit u une suite réelle et ℓ un nombre réel.
Si u converge vers ℓ, alors toute suite extraite de u converge vers ℓ.

Démonstration. — Soit $v = (v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de u. Il existe une extraction $\varphi :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = u_{\varphi(k)}$. Vérifions que v converge vers ℓ.

- Soit $\varepsilon > 0$.
- Nous devons vérifier qu'il existe un entier N vérifiant : $\forall k \geq N, \quad |v_k - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire : $\left|u_{\varphi(k)} - \ell\right| < \varepsilon$.

- Comme u est convergente, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant :
$$\forall n \geq N_0, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon. \tag{$\star$}$$
- On constate alors que pour tout $k \geq N_0$, on a $\varphi(k) \geq k$ (en utilisant la proposition 2.7.1), donc $\varphi(k) \geq N_0$; cela permet d'utiliser $(\star)$ avec $n = \varphi(k)$: on obtient $\left|u_{\varphi(k)} - \ell\right| < \varepsilon$.
- L'entier $N = N_0$ vérifie donc bien : $\forall k \geq N, \quad |v_k - \ell| < \varepsilon$.

□

On a vu qu'il pouvait être délicat de montrer, directement à partir de la définition de la convergence, qu'une suite n'a pas de limite. Le théorème précédent peut être très utile dans cette perspective :

Corollaire 2.46 – Comment montrer concrètement qu'une suite diverge

Soit u une suite réelle. S'il existe deux suites extraites de u qui convergent vers des limites différentes, alors u n'est pas convergente.

Exemple 2.47. — Revenons à l'exemple de la suite $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ▷ Notons $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ la sous-suite des termes de u d'indice pair. Alors pour tout k de $\mathbb{N}$, $v_k = (-1)^{2k} = 1$. La suite v est donc constante de valeur 1 et converge vers 1.
- ▷ Notons $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ la sous-suite des termes d'indice impair. Alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ w_k = (-1)^{2k+1} = -1$.
  La suite w est donc constante de valeur -1 et converge vers -1.

La suite u admet donc deux sous-suites convergentes dont les limites sont distinctes. D'après le corollaire ci-dessus, elle ne peut être convergente.

Exemple 2.48. — Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n \cdot 2^n$.
- ▷ Notons $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$. Alors pour tout k de $\mathbb{N}$, $v_k = 2^{2k} = 4^k$. La suite v est donc la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 4 : elle tend vers $+\infty$.
  Ainsi, la suite u admet une sous-suite qui tend vers $+\infty$; cela suffit [5] à assurer la divergence de u.
- ▷ Notons $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ w_k = -2^{2k+1} = -2 \cdot 2^{2k}$.
  La suite w est donc obtenue en multipliant la suite v par (-2) et elle tend vers $-\infty$.
  Ainsi, la suite u a la particularité d'admettre une sous-suite qui tend vers $+\infty$ et une autre qui tend vers $-\infty$.

Exercice 2.5. —

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sin\left(\frac{n^2\pi}{3}\right)$. Vérifier que (u_n) diverge.
2. Soit $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$. On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
   Vérifier que (u_n) diverge.

7.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass. — Le résultat suivant est très important, mais difficile. C'est l'une des clefs de voûte de l'analyse.

Théorème 2.49 – Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Pour démontrer ce théorème, nous allons établir le fait suivant :

5. En utilisant la proposition, pas le corollaire.

Lemme 2.50 – Lemme du Soleil-Levant

De toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone.

Ce théorème est difficile, mais le théorème de Bolzano-Weierstrass en est une conséquence simple. En effet, si u est une suite réelle bornée, le lemme permet d'obtenir une sous-suite monotone v de u ; la suite v est alors monotone et bornée, donc convergente (théorème 2.34).

Démonstration du lemme du Soleil-Levant. — Soit u une suite réelle. Considérons l'ensemble

$$E = \{p \in \mathbb{N}, \quad \forall n > p, \quad u_n < u_p\}.$$

Nous dirons que la suite u a la *propriété du Soleil-Levant* lorsque E est infini. Notre démonstration distinguera deux cas : celui où u a la propriété du Soleil-Levant, et celui où u ne l'a pas.

- Supposons que u ait la propriété du Soleil-Levant. Nous allons montrer qu'on peut extraire de (u_n) une sous-suite décroissante : en fait, nous allons montrer qu'une telle suite est obtenue en conservant les termes de u dont l'indice appartient à E.

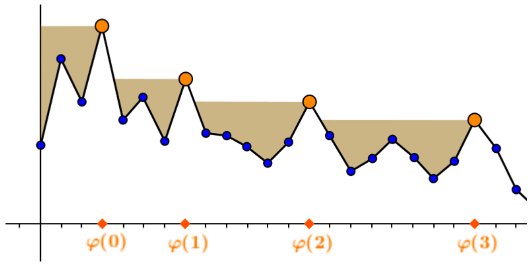


Illustration qui explique le nom de la propriété : les éléments de E sont les n pour lesquels u_n est doré.
Si le Soleil se lève « à l'est » sur le graphe ci-dessus, les éléments de E donnent la position des sommets éclairés.

Nous devons construire une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est strictement croissante, c'est-à-dire : } \forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(k+1) > \varphi(k) \\ (u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante, c'est-à-dire : } \forall k \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(k+1)} \leq u_{\varphi(k)}. \end{cases}$$

Nous allons construire $\varphi(0)$, puis $\varphi(1)$, puis $\varphi(2)$, etc.

▷ Comme l'ensemble E est infini, il est non vide ; c'est une partie de $\mathbb{N}$, donc il a un plus petit élément. Choisissons $\varphi(0) = \min(E)$.

▷ Comme l'ensemble E est infini, donc comporte strictement plus d'un élément, l'ensemble $E' = E - \{\varphi(0)\}$ est non vide. Comme $E' \subset \mathbb{N}$, il admet un plus petit élément. Posons $\varphi(1) = \min(E')$.

On a alors : $\begin{cases} \varphi(1) > \varphi(0) & \text{car } \varphi(1) \text{ appartient à } E \text{ dont } \varphi(0) \text{ est le plus petit élément, mais n'est pas égal à } \varphi(0)\,; \\ u_{\varphi(1)} < u_{\varphi(0)} & \text{car } \varphi(0) \text{ appartient à } E, \text{ ce qui signifie que } u_n < u_{\varphi(0)} \text{ dès que } n > \varphi(0). \end{cases}$

▷ On construit le reste de l'extraction φ par récurrence. Soit k un entier naturel ; supposons qu'on ait construit $\varphi(0), \varphi(1), ..., \varphi(k)$ de façon à ce qu'ils représentent les $k+1$ « premiers » éléments de E, au sens où $\{p \in E,\ p \leq \varphi(k)\} = \{\varphi(0), \varphi(1), ..., \varphi(k)\}$.

Pour définir $\varphi(k+1)$, considérons $E' = E - F$ où $F = \{\varphi(0), \varphi(1), ..., \varphi(k)\}$. Comme E est infini, E' est non vide et inclus dans $\mathbb{N}$, donc il admet un plus petit élément ; nous notons $\varphi(k+1) = \min(E')$.

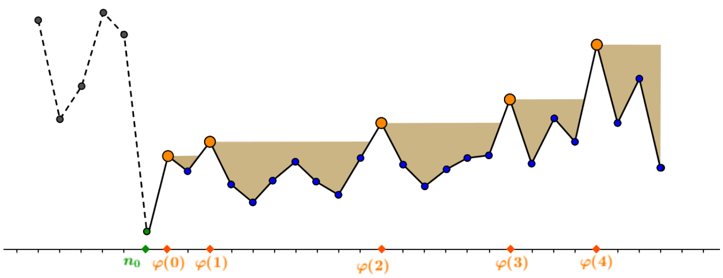
On a alors : $\begin{cases} \varphi(k+1) > \varphi(k) & \text{car } \varphi(k+1) \text{ appartient à } E, \text{ mais pas à } F\,; \\ u_{\varphi(k+1)} < u_{\varphi(k)} & \text{car } \varphi(k) \text{ appartient à } E, \text{ ce qui signifie que } u_n < u_{\varphi(k)} \text{ dès que } n > \varphi(k). \end{cases}$

▷ Nous avons bien construit par récurrence une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ soit décroissante (et même strictement décroissante). Dans le cas où u a la propriété du Soleil-Levant, notre but est atteint.

- Supposons maintenant que u n'ait pas la propriété du Soleil-Levant. Nous allons montrer qu'on peut extraire de (u_n) une sous-suite croissante.

Comme E est fini ou vide, il existe un entier n_0 vérifiant : $\quad \forall p \geq n_0,\ p \notin E, \quad$ c'est-à-dire

$$\forall p \geq n_0, \quad \exists n > p, \quad u_n \geq u_p. \tag{SC}$$



Construction de l'extraction φ à l'aide de la propriété (SC).

Nous devons construire une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est strictement croissante, c'est-à-dire : } \forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(k+1) > \varphi(k) \\ (u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}} \text{ est croissante, c'est-à-dire : } \forall k \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(k+1)} \geq u_{\varphi(k)}. \end{cases}$$

Nous allons construire $\varphi(0)$, puis $\varphi(1)$, puis $\varphi(2)$, etc.

- ▷ Choisissons $\varphi(0) = n_0 + 1$.
- ▷ Pour construire $\varphi(1)$, utilisons (SC) avec $p = \varphi(0)$: on sait alors qu'il existe un entier n vérifiant : $\begin{cases} n > \varphi(0) \\ u_n \geq u_{\varphi(0)}. \end{cases}$

  Nous posons $\varphi(1) = n$: ainsi $\varphi(1)$ a été choisi pour vérifier $\begin{cases} \varphi(1) > \varphi(0) \\ u_{\varphi(1)} \geq u_{\varphi(0)} \end{cases}$.
- ▷ On construit le reste de l'extraction φ par récurrence : si k est un entier naturel et si on suppose construit $\varphi(k)$, on construit $\varphi(k+1)$ en utilisant (SC) avec $p = \varphi(k)$. On obtient l'existence d'un entier n vérifiant : $\begin{cases} n > \varphi(k) \\ u_n \geq u_{\varphi(k)} \end{cases}$. On pose $\varphi(k+1) = n$: ainsi $\varphi(k+1)$ a été choisi pour vérifier $\begin{cases} \varphi(k+1) > \varphi(k) \\ u_{\varphi(k+1)} \geq u_{\varphi(k)} \end{cases}$.
- ▷ Nous avons bien construit une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ soit croissante.

□

CHAPITRE 3

LIMITES DE FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

1. Vocabulaire sur les fonctions

1.1. Définition. —

Définition 3.1 – Fonction numérique

Une **fonction numérique d'une variable réelle** f est la donnée de trois objets :
- une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ (l'*ensemble de définition* de la fonction),
- une partie F de $\mathbb{R}$ (l'*ensemble d'arrivée* de la fonction),
- un sous-ensemble Γ_f de $\mathcal{D} \times F$ ayant la propriété suivante : (le *graphe* de la fonction)

Pour chaque x de $\mathcal{D}$, il existe un unique y de F tel que (x, y) appartienne à Γ_f.

Si x est un élément de $\mathcal{D}$, le nombre y tel que (x, y) appartienne à Γ_f est noté $f(x)$.

L'écriture

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

permet d'introduire une fonction
- *définie sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans F*,
- dont le *graphe* est le sous-ensemble $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad x \in \mathcal{D} \text{ et } y = f(x)\right\}$.

Remarque sur les manières de définir une fonction. — Si $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathbb{R}$, il y a plusieurs manières classiques de définir une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$.
- On peut donner une expression explicite unique permettant, pour chaque x de $\mathcal{D}$, de calculer $f(x)$. Par exemple,

  $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

  Dans cet exemple le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, son ensemble d'arrivée est également $\mathbb{R}$, même si $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$. L'image de 2 est 4. Le réel 9 a deux antécédents : 3 et -3.

- On peut donner, pour chaque x de $\mathcal{D}$, une expression explicite pour $f(x)$, mais s'autoriser à ce que l'expression dépende du point de $\mathcal{D}$ considéré. Par exemple, la fonction

  $$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

  est souvent appelée *fonction indicatrice de l'ensemble* $\mathbb{Q}$ (et souvent notée $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$).

- Mais bien sûr, des définitions « plus abstraites » sont possibles : seul importe le fait que pour chaque x de $\mathcal{D}$, un réel $f(x)$ soit défini *sans ambiguité*. Par exemple, on peut définir

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \text{le nombre de fois qu'apparaît 7 dans l'écriture décimale de l'entier } E(\pi \cdot x^2). \end{array}$$

  et il n'y a pas de raison de ne pas pouvoir étudier cette fonction (par exemple, savez-vous montrer qu'elle est minorée mais pas majorée ?).

***Attention* (ne pas confondre fonction et expression).** — En écrivant

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} g & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} h & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

on définit *trois fonctions différentes*, avec des propriétés différentes : la fonction g est injective mais pas surjective, la fonction h est surjective mais pas injective, la fonction f n'est ni injective ni surjective [1].

L'expression seule ne permet pas de déterminer si une fonction est injective, surjective ou bijective.

Les ensembles de départ et d'arrivée font partie de la définition de la fonction.

Bien sûr, il est tentant et naturel de vouloir s'écarter de ce niveau de se précision et de vouloir se contenter de l'expression pour définir « la fonction inverse », parler de « la fonction qui à x associe $\ln(x\sin(x))$ », etc. Lorsqu'on parlera de « *la fonction* $x \mapsto f(x)$ », on considèrera implicitement l'ensemble $\mathcal{D}_{\max}$ des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ a un sens et « *la fonction* $x \mapsto f(x)$ » désignera implicitement la fonction

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_{\max} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

.

Restriction à une partie de l'ensemble de départ. — Si f est une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ et si $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{D}$, la **restriction** de f à $\mathcal{E}$ est l'application

$$\begin{array}{rcrcl} f_{|\mathcal{E}} & : & \mathcal{E} & \to & F \\ & & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Si $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathbb{R}$, si f est une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$ et si $\mathcal{E}$ est une partie de $\mathcal{D}$, dire que f vérifie une propriété *sur* $\mathcal{E}$, c'est dire que la restriction $f_{|\mathcal{E}}$ vérifie cette propriété. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ bien qu'elle ne soit pas croissante sur $\mathbb{R}$.

1.2. Propriétés remarquables. —

1.2.1. *Monotonie, lien avec l'injectivité.* —

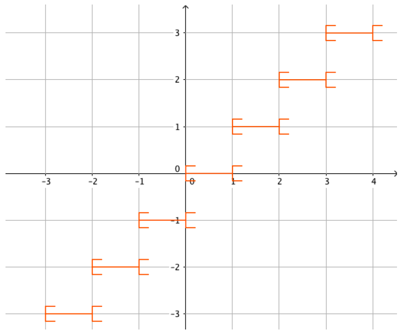
Définition 3.2 – Monotonie

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$.

- On dit que f est croissante lorsque : $\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \quad x < y \implies f(x) \leq f(y).$
- On dit que f est strictement croissante lorsque : $\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \quad x < y \implies f(x) < f(y).$
- On dit que f est décroissante lorsque : $\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \quad x < y \implies f(x) \geq f(y).$
- On dit que f est strictement décroissante lorsque : $\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \quad x < y \implies f(x) > f(y).$

1. On rappelle qu'une fonction f définie sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $F \subset \mathbb{R}$ est
- *injective* si, pour tout y de F, l'équation $y = f(x)$ a **au plus** une solution x dans $\mathcal{D}$.
- *surjective* si, pour tout y de F, l'équation $y = f(x)$ a **au moins** une solution x dans $\mathcal{D}$.
- *bijective* si, pour tout y de F, l'équation $y = f(x)$ a **exactement** une solution x dans $\mathcal{D}$.

Ne pas confondre *croissante* et *strictement croissante* : une fonction constante est croissante. La fonction $x \mapsto E(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, mais pas strictement croissante.



Proposition 3.3 – Strictement monotone implique injective

Toute fonction strictement monotone est injective.

Démonstration. — Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$. Supposons f strictement monotone et montrons que f est injective. Nous devons montrer l'assertion suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \quad (x \neq y \implies f(x) \neq f(y))\,.$$

Soient x et y deux éléments de $\mathcal{D}$. Supposons $x \neq y$. Deux cas peuvent alors se présenter :

- Cas 1 : $x < y$. Dans ce cas, selon que f est soit strictement croissante soit strictement décroissante, on a respectivement $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$, mais on n'a jamais $f(x) = f(y)$.
- Cas 2 : $x > y$. Dans ce cas, selon que f est soit strictement croissante soit strictement décroissante, onstrictement monotone on a $f(x) > f(y)$ ou $f(x) < f(y)$, mais on n'a jamais $f(x) = f(y)$.

Dans les deux cas, on a bien $f(x) \neq f(y)$, ce qu'il fallait démontrer. □

1.2.2. *Fonctions majorées, minorées, supremum et infimum.* —

Définition 3.4 – Fonction majorée, minorée, bornée

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$. On dit que f est

- majorée s'il existe un réel M vérifiant : $\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leq M.$ On dit alors que M est un majorant de f.
- minorée s'il existe un réel m vérifiant : $\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \geq m.$ On dit alors que m est un majorant de f.
- bornée si elle est majorée et minorée, ce qui équivaut à l'existence d'un réel M vérifiant : $\forall x \in \mathcal{D}, |f(x)| \leq M.$

Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ est minorée (0, -1 sont par exemple des minorants) mais pas majorée. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^{-x^2}$ est à la fois majorée et minorée ; elle est donc bornée.

Rappelons que *l'image directe de $\mathcal{D}$ par f* est l'ensemble $\mathbf{Im}(f) = \{f(x),\ x \in \mathcal{D}\}$ des nombres ayant au moins un antécédent par f. Lorsque $\mathcal{D}$ est non-vide, l'ensemble $\mathbf{Im}(f)$ est aussi non-vide. Si $\mathcal{D}$ est non-vide,

- Lorsque f est majorée, on note $\sup(f)$ (ou : $\sup\limits_{x\in\mathcal{D}} f(x)$) le nombre $\sup\left[\mathbf{Im}(f)\right] = \sup\{f(x),\ x \in \mathcal{D}\}$.
- Lorsque f est minorée, on note $\inf(f)$ (ou : $\inf\limits_{x\in\mathcal{D}} f(x)$) le nombre $\inf\left[\mathbf{Im}(f)\right] = \sup\{f(x),\ x \in \mathcal{D}\}$.

1.2.3. *Extremum, global ou local.* —

Définition 3.5 – Extremum global

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$, x_0 un point de $\mathcal{D}$. On dit que f admet
- un maximum global en x_0 lorsque : $\forall u \in \mathcal{D},\ f(u) \leq f(x_0)$
- un minimum global en x_0 lorsque : $\forall u \in \mathcal{D},\ f(u) \geq f(x_0)$

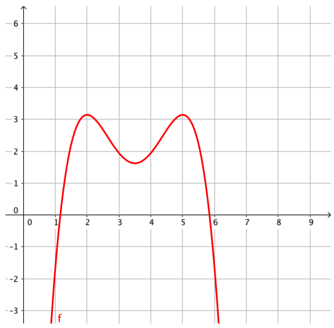
On dit que f a un *extremum* global en x_0 lorsqu'elle y admet soit un minimum global, soit un maximum global.

Définition 3.6 – Extremum local

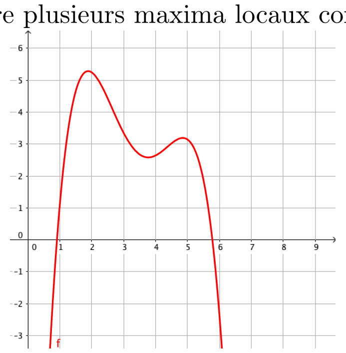
Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$. On dit que f admet
- un maximum local en x s'il existe un nombre $\delta > 0$ vérifiant : $\forall u \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ f(u) \leq f(x)$.
- un minimum local en x s'il existe un nombre $\delta > 0$ vérifiant : $\forall u \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ f(u) \geq f(x)$.

On parle de même d'*extremum local*.

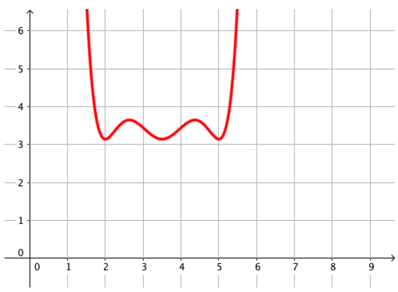
Voici quelques remarques sur le lien entre les deux notions :
- Si f admet en x un maximum global et admet aussi en x' un maximum global, alors $f(x) = f(x')$.



Ici f atteint en $x = 2$ un maximum global ; elle atteint aussi un maximum global en $x' = 5$; on a $f(x) = f(x') = \pi$.
- Par contre, une fonction peut admettre plusieurs maxima locaux correspondant à des valeurs différentes :

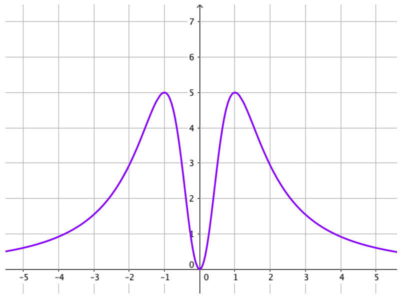


- Si f admet en x un extremum global, elle y admet aussi un extremum local.
- Par contre, une fonction peut admettre plusieurs maxima locaux mais aucun maximum global :



Remarque 3.7. — Dire que f admet un maximum global, c'est dire que l'ensemble $\mathbf{Im}(f)$ admet un plus grand élément (en effet, f admet un maximum global en x_0 si et seulement si $\mathbf{Im}(f)$ admet $f(x_0)$ pour plus grand élément).

- Lorsque f admet un maximum global, on note $\max(f)$ le nombre $\max\left[\mathbf{Im}(f)\right] = \max\{f(x),\ x \in \mathcal{D}\}$.
- Lorsque f admet un minimum global, on note $\min(f)$ le nombre $\min\left[\mathbf{Im}(f)\right] = \sup\{f(x),\ x \in \mathcal{D}\}$.



On veillera à ne pas confondre *l'endroit où f atteint son maximum* et la *valeur de* $\max(f)$: sur la figure ci-dessus, la fonction f admet un maximum global et $\max(f) = 5$, en revanche ce maximum est *atteint en deux points distincts*, à savoir -1 et 1.

1.2.4. *Parité.* —

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{D}$ est un *domaine symétrique* lorsque : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x \in \mathcal{D} \implies (-x) \in \mathcal{D}\right)$.

Rappelons que si $\mathcal{D}$ est un domaine symétrique et si f est une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$,

- on dit que f est paire lorsque : $\quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = f(x)$,
- on dit que f est impaire lorsque : $\quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = -f(x)$.

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celui d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

1.2.5. *Périodicité.* —

Soient T un nombre réel strictement positif et $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, (x \in \mathcal{D} \iff (x+T) \in \mathcal{D})$. Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est *T-périodique* lorsque : $\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x+T) = f(x)$.

Par exemple, les fonctions cos et sin, définies sur $\mathbb{R}$, sont 2π-périodiques. L'ensemble $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) = \left\{x \in \mathbb{R},\ \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}\right\}$ vérifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in \mathcal{D} \iff (x+\pi) \in \mathcal{D}$, et $\tan : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est π-périodique.

On prendra garde au fait qu'il n'existe pas forcément de « plus petite période possible » sauf précision supplémentaire : par exemple, la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ est T-périodique pour tout nombre rationnel $T > 0$.

1.3. Opérations sur les fonctions, bijection réciproque. —

Définition 3.8 – Opérations sur les fonctions

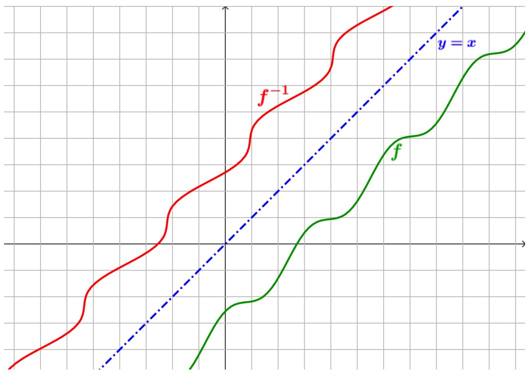
- Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions numériques définies sur $\mathcal{D}$.
  — La somme $f+g$ est la fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ obtenue en posant : $\forall x \in \mathcal{D},\ (f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
  — Le produit fg est la fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ obtenue en posant : $\forall x \in \mathcal{D},\ (fg)(x) = f(x)g(x)$.
  — Lorsque g ne s'annule pas, le quotient $\frac{f}{g} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est obtenu en posant : $\forall x \in \mathcal{D},\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
- Soient E, F, G des ensembles avec $F \subset G$. Soient f une fonction de E dans F et g une fonction de G dans H. La composée $g \circ f$ est la fonction de E dans H définie par : $\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$.

Proposition 3.9 – Composée de fonctions monotones

- *La composée de deux fonctions monotones de même sens est croissante.*
- *La composée de deux fonctions monotones de sens contraire est décroissante.*

Définition 3.10 – Bijection réciproque

Soient E et F deux ensembles, f une fonction bijective de E dans F La bijection réciproque de f est l'application f^{-1} de F dans E qui, à chaque élément y de F, associe l'unique x de E vérifiant $f(x) = y$.



Graphes d'une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de sa bijection réciproque. Les graphe de f^{-1} est symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice [(2)].

Rappels. —
- Si f est une bijection de E dans F, alors f^{-1} est une bijection de F dans E et on a $(f^{-1})^{-1} = f$.
  De plus, $f \circ f^{-1} : F \to F$ est l'application identité id_F, tandis que $f^{-1} \circ f : E \to E$ est l'application id_E.
- Soient f une bijection de E dans F et g une bijection de F dans G. Alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Si f est une bijection de E dans F et si f est *croissante*, alors f^{-1} est *croissante* elle aussi.

Attention aux notations. — Ne pas confondre la bijection réciproque f^{-1} et l'application $\frac{1}{f}$ définie avec la multiplication des nombres réels.

2. Si (x, y) est un couple de réels, le point de coordonnées (x, y) appartient à Γ_f si et seulement si $y = f(x)$, ce qui équivaut à $x = f^{-1}(y)$ pour f bijective, ou encore à : $(y, x) \in \Gamma_{f^{-1}}$. Ainsi, (x, y) appartient au graphe de f si et seulement si (y, x) appartient à celui de f^{-1}. Les points (x, y) et (y, x) sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

2. Notion de limite

2.1. Où peut-on considérer la limite ? — Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$, x_0 un point de la droite réelle. À quelle condition est-il raisonnable d'envisager d'étudier la limite $\lim\limits_{u \to x_0} f(u)$?

Nous partons du constat suivant :

- il n'est pas nécessaire que f soit définie en x_0 (par exemple, étudier $\lim\limits_{u\to 0} \exp(-\frac{1}{u^2})$ ne pose pas de problème) ;
- en revanche, il faut « *que u puisse s'approcher de x_0 tout en restant dans le domaine où $f(u)$ est bien défini* ».

Proposition 3.11 – Deux descriptions des points dont on peut s'approcher

Soient x_0 un nombre réel et $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) Pour tout $\delta > 0$, l'intersection $\mathcal{D} \cap \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ est non vide.

(b) Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{D}$ qui converge vers x_0.

Définition 3.12 – Adhérence d'un domaine

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. L'adhérence de $\mathcal{D}$, notée $\mathbf{Adh}(\mathcal{D})$, est l'ensemble des nombres réels x qui vérifient l'une des propriétés (donc les deux propriétés) de la proposition précédente.

Remarque 3.13. — Si x appartient à $\mathcal{D}$ alors x appartient à $\mathbf{Adh}(\mathcal{D})$. En effet la suite constante égale à x est bien à valeurs dans $\mathcal{D}$ et converge vers x. D'où

$$\mathcal{D} \subset \mathbf{Adh}(\mathcal{D}).$$

Exemple 3.14. — Si a est un réel, l'adhérence de l'intervalle ouvert $]a, +\infty[$ est l'intervalle fermé $[a, +\infty[$.
En effet :

- Par la remarque précédente, on sait déjà que cette adhérence contient $]a, +\infty[$. Il reste à trouver les autres éléments.
- Vérifions maintenant que a appartient à $\mathbf{Adh}\,(]a, +\infty[)$.
  Nous devons vérifier que pour tout $\delta > 0$, l'intersection $]a, +\infty[\cap]a - \delta, a + \delta[$ est non-vide.
  Or pour tout $\delta > 0$, on a $]a, +\infty[\cap]a - \delta, a + \delta[=]a, a + \delta[$; on constate que l'intervalle $]a, a + \delta[$ est non-vide (il contient par exemple $a + \frac{\delta}{2}$), ce qui achève la vérification.
- Vérifions enfin qu'aucun nombre strictement inférieur à a ne peut appartenir à $\mathbf{Adh}(]a, +\infty[)$. Soit x un nombre strictement inférieur à a : nous devons qu'il existe $\delta > 0$ tel que l'intersection $]a, +\infty[\cap]x - \delta, x + \delta[$ soit vide.
  Or, si nous choisissons $\delta = a - x$, on a bien $\delta > 0$; on constate alors que $x + \delta = a$, donc tout élément de $]x - \delta, x + \delta[$ est strictement inférieur à a, si bien que $]a, +\infty[\cap]x - \delta, x + \delta[$ est vide.

Exercice 3.1. —

1. Vérifier que $\mathbf{Adh}(\mathbb{R}^\star) = \mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$. Vérifier que : $\mathbf{Adh}\,(]a, b[) = [a, b]$.
3. Si U est dense dans $\mathbb{R}$, quelle est l'adhérence de U ?
4. Quelle est l'adhérence de $\mathbb{Z}$?
5. Vérifier que si $\mathcal{D}$ est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, alors $\sup(\mathcal{D})$ et $\inf(\mathcal{D})$ appartiennent à $\mathbf{Adh}\,(\mathcal{D})$.

Démonstration de la proposition 3.11. —

- Montrons d'abord que (b) implique (a). Supposons qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{D}$ qui tende vers x_0. Soit $\delta > 0$. La définition de la convergence assure qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \geq N, u_n \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Mais alors le nombre u_N est un élement de $\mathcal{D}$ et appartient à $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, donc $\mathcal{D}\cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ est non-vide.
- Montrons maintenant que (a) implique (b). Supposons

$$\forall \delta > 0, \quad \exists u \in \mathcal{D}, \quad u \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\tag{$\star$}$$

et cherchons à construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{D}$ qui converge vers x_0. Pour chaque n de $\mathbb{N}$, appliquons $(\star)$ avec $\delta = \frac{1}{n+1}$: on obtient l'existence d'un élément de $\mathcal{D}$ dans l'intervalle $]x_0 - \frac{1}{n+1}, x_0 + \frac{1}{n+1}[$; dans la mesure où cet élément dépend de δ, donc de n, notons-le u_n.

De cette lanière on obtient, pour chaque n de $\mathbb{N}$, un élément u_n de $\mathcal{D}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_0 - \frac{1}{n+1} \le u_n \le x + \frac{1}{n+1},$$

c'est donc une suite de points de $\mathcal{D}$ qui converge vers x_0.

□

2.2. Définition de la limite. —

Définition 3.15 – Limite finie en un point de $\mathbb{R}$

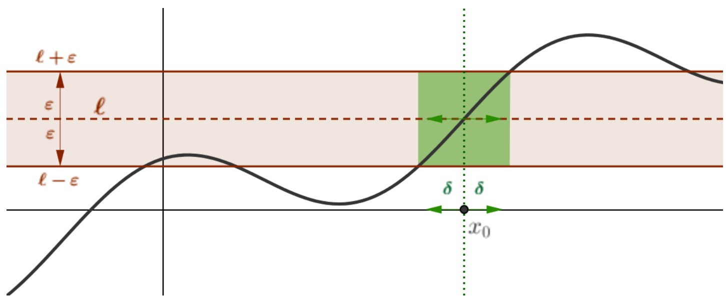
Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, x_0 un point de l'adhérence $\mathbf{Adh}(\mathcal{D})$, et ℓ un réel. On dit que f tend vers ℓ en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall u \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathcal{D}, \quad |f(u) - \ell| < \varepsilon.$$

Notations. — Pour dire que f tend vers ℓ en x_0, on peut écrire par exemple : $f(u) \xrightarrow[u \to x_0]{} \ell$, ou : $f \xrightarrow[x_0]{} \ell$. Lorsqu'on a déjà démontré que f admet une limite ℓ en x_0, *et seulement dans ce cas*, on peut écrire : $\lim\limits_{u \to x_0} f(u) = \ell$.

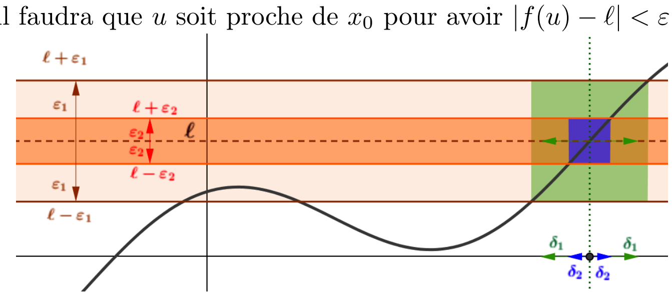
Commentaire sur la définition. — Dire que f tend vers ℓ en x_0, c'est dire que

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'écart entre $f(u)$ et ℓ est strictement inférieur à ε dès que u est assez proche de x_0.

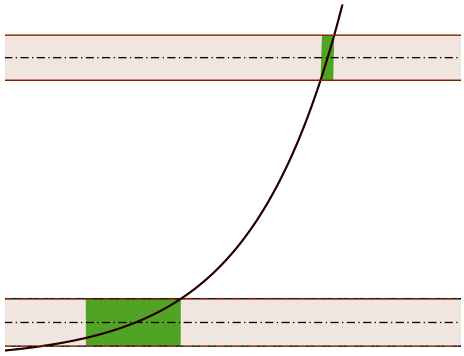


Si $x_0 \in \mathbf{Adh}(\mathcal{D})$ et $\varepsilon > 0$ sont fixés et si on cherche un écart δ à x_0 en-deçà duquel l'écart entre $f(u)$ et ℓ est $< \varepsilon$,

- *l'écart δ dépend de ε* : intuitivement,
  « plus ε est petit, plus il faudra que u soit proche de x_0 pour avoir $|f(u) - \ell| < \varepsilon$. ».



- *l'écart δ dépend aussi de x_0* : intuitivement, si f a des variations « brusques » au voisinage de x_0, l'écart δ nécessaire n'est pas le même que si f a des variations « douces » au voisinage de x_0.



La deuxième remarque, qui n'avait pas d'analogue dans le cas des limites de suite, peut compliquer l'utilisation directe de la définition (voir l'exemple 3.17 ci-dessous).

Exemple 3.16. — Montrons que si f est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4x - 5$, alors f a pour limite en $x_0 = 2$ le nombre 3.

Reformulant légèrement la définition, nous devons vérifier l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (\quad |u-2| < \delta \quad \Longrightarrow |f(u) - 3| < \varepsilon \quad).$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Nous devons savoir à quelle condition u est assez proche de 2 pour qu'on ait $|f(u) - 3| < \varepsilon$,
c'est-à-dire $|4u - 5 - 3| < \varepsilon$, autrement dit $|4u - 8| < \varepsilon$...
Mais cette condition est vérifiée dès que $|u - 2| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Choisissons $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Alors pour tout u de $\mathbb{R}$, si $|u - 2| < \delta$, on a : $|f(u) - 3| = |4u - 5 - 3| = |4u - 8| = 4\,|u - 2| < 4\delta$, si bien que $|f(u) - 3| < \varepsilon$.

Exemple 3.17. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Montrons que pour tout réel x_0, on a : $f(u) \xrightarrow[u \to x_0]{} x_0^2$.

Soit x_0 un nombre réel fixé. Nous devons vérifier l'assertion suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \left(\quad |u - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \left|u^2 - x_0^2\right| < \varepsilon \quad \right).$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Nous devons chercher à quelle condition u est assez proche de x_0 pour qu'on ait $\left|f(u) - x_0^2\right| < \varepsilon$
c'est-à-dire $\left|u^2 - x_0^2\right| < \varepsilon$, autrement dit $|u - x_0| \cdot |u + x_0| < \varepsilon$...
À quelle condition δ est-il assez petit pour que la condition $|u - x_0| < \delta$ garantisse $\left|u^2 - x_0^2\right| < \varepsilon$?
Grâce à l'inégalité triangulaire, on constate que si $|u - x_0| < \delta$, alors :
$|u - x_0| \cdot |u + x_0| \leq |u - x_0| \cdot (|u - x_0| + 2\,|x_0|) < \delta(\delta + 2\,|x_0|)$.
Il suffit donc qu'on ait $\delta(\delta + 2\,|x_0|) \leq \varepsilon$, ou encore : $\delta^2 + 2\,|x_0|\,\delta - \varepsilon \leq 0$.
En étudiant cette inéquation du second degré, on constate que cela équivaut à :
$\delta \in \left[-|x_0| - \sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon^2}, -|x_0| + \sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon^2}\right]$...

Choisissons $\delta = \sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon^2} - |x_0|$ (qui est bien un nombre strictement positif).

On a alors $\delta^2 + 2\,|x_0|\,\delta - \varepsilon < 0$, donc $\delta(\delta + 2\,|x_0|) < \varepsilon$.

Si u est un réel vérifiant $|u - x_0| < \delta$, on a alors

$$\begin{aligned}
\left|u^2 - x_0^2\right| &= |u - x_0| \cdot |u + x_0| \\
&\leq |u - x_0| \cdot (|u - x_0| + 2\,|x_0|) && \text{(par l'inégalité triangulaire)} \\
&< \delta(\delta + 2\,|x_0|) && \text{(puisque } |u - x_0| < \delta) \\
&< \varepsilon && \text{(puisque } \delta(\delta + 2\,|x_0|) < \varepsilon).
\end{aligned}$$

Remarque 3.18. — Il n'est pas déraisonnable de trouver que le travail que nous avons dû effectuer au brouillon est assez délicat. Pourtant, il ne s'agissait que de montrer que si u tend vers x_0 alors u^2 tend vers x_0^2 !

Remarque 3.19 **(Important : le cas où f est définie en x_0).** — Avec les notations de la définition ci-dessus, supposons que x_0 appartienne à $\mathcal{D}$. Alors pour tout $\delta > 0$, le nombre x_0 appartient à $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap\mathcal{D}$. Si f tend vers ℓ en x_0, alors on a

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0, \quad \forall u \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap\mathcal{D}, \quad |f(u) - \ell| < \varepsilon.$$

et en conséquence, pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $u = x_0$ vérifie $|f(u) - \ell| < \varepsilon$. Mais alors on a : $\forall\varepsilon > 0$, $|f(x_0) - \ell| < \varepsilon$, ce qui ne peut arriver que si ℓ et $f(x_0)$ sont égaux. Ainsi :

Si f est déjà définie en x_0, alors la seule limite possible pour f en x_0 est le nombre $f(x_0)$.

Lorsqu'on étudie l'existence d'une limite en $x_0 = 0$ pour les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$$

qui bien sûr coïncident sur $\mathbb{R}^\star$, on constate la différence suivante : la fonction f est déjà définie en $x_0 = 0$, mais n'a pas de limite en x_0, tandis que g n'est pas définie en $x_0 = 0$ et tend vers 1 en x_0.

On prendra garde en particulier au fait que la fonction f admet le nombre 1 pour limite « à droite » et « à gauche » en x_0, mais n'admet pas de limite « tout court » en x_0 (au sens de la définition précédente).

Exercice 3.2. —

1. Vérifier à l'aide de la définition que : $x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
2. Vérifier à l'aide de la définition que : $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 7]{} \frac{1}{7}$.
3. Vérifier que si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers zéro en zéro, alors la fonction $x \mapsto 7 \cdot f(x^2)$ tend aussi vers zéro en zéro.

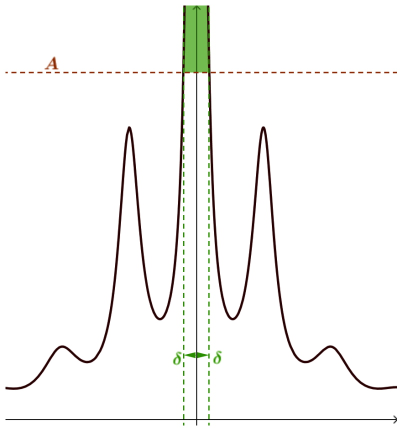
2.2.1. *Ce que signifie « tendre vers $\pm\infty$ en un point de $\mathbb{R}$ ».* — On s'intéresse maintenant à ce que signifient des affirmations comme : « $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 3 ».

Définition 3.20 – Limite infinie en un point fini

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, x_0 un point de l'adhérence $\mathbf{Adh}(\mathcal{D})$.
On dit que f tend vers $+\infty$ en x_0 lorsque :

$$\forall A > 0, \quad \exists\delta > 0, \quad \forall u \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap\mathcal{D}, \quad f(u) > A.$$

Remarque 3.21. — Si f est définie en x_0, le nombre $u = x_0$ appartient à $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap\mathcal{D}$ pour tout $\delta > 0$; or, pour $u = x_0$ on ne peut avoir $f(u) > A$ que si A n'excède pas $f(x_0)$. Ainsi, il n'est possible que f tende vers $+\infty$ en x_0 que si x_0 appartient à $\mathbf{Adh}(\mathcal{D})$, mais pas à $\mathcal{D}$.



Bien sûr, il y a une définition analogue pour « tendre vers $-\infty$ en x_0 » : avec les hypothèses de la définition précédente, on dit que f tend vers $-\infty$ en x_0 lorsque : $\forall A < 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall y \in]x-\delta, x+\delta[\cap \mathcal{D}, \quad f(y) < A$.

Exercice 3.3. — Montrer que si f tend vers $+\infty$ en x_0, alors f ne peut pas être majorée.

2.3. Limite en $+\infty$ ou en $-\infty$. —

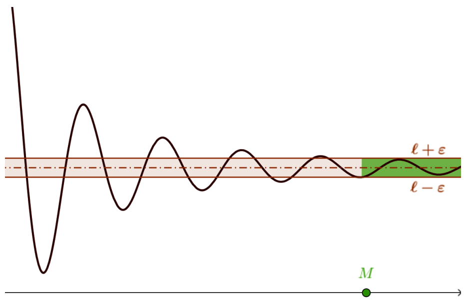
2.3.1. *Cas où la valeur de la limite est finie.* —

Définition 3.22 – Limite finie en $\pm\infty$

Soient $\mathcal{D}$ une partie *non majorée* de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, ℓ un nombre réel. On dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall u \in]M, +\infty[\cap \mathcal{D}, \quad |f(u) - \ell| < \varepsilon.$$

De même, si $\mathcal{D}$ n'est pas minoré, si f est une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et si ℓ un nombre réel, on dit que f tend vers ℓ en $-\infty$ lorsque : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists m < 0,\ \forall u \in]-\infty, m[\cap \mathcal{D}, \quad |f(u) - \ell| < \varepsilon$.



Exemple : la fonction $x \mapsto 1 + \frac{\sin(x)}{x^2}$ tend vers 1 en $+\infty$.

Exemple 3.23. — Vérifions que si $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, alors f tend vers 0 en $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$.

On cherche M tel que pour tout u de $\mathbb{R}^\star$ vérifiant $u > M$, on ait $\left|\frac{1}{u^3} - 0\right| < \varepsilon$.

Cette condition équivaut à : $|u|^3 > \frac{1}{\varepsilon}$, autrement dit : $|u| > \sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon^{-1/3}$.

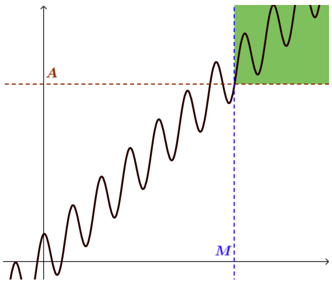
On constate donc que si $M = \varepsilon^{-1/3}$, avoir $u \geq M$ garantira $\left|\frac{1}{u^3}\right| < \varepsilon$...

Choisissons donc $M = \varepsilon^{-1/3}$ de sorte que pour tout u de $\mathbb{R}^\star$ vérifiant $u > M$, $|f(u) - 0| = \frac{1}{|u^3|} < \frac{1}{(\varepsilon^{-1/3})^3} = \varepsilon$.

2.3.2. *Cas où la valeur de la limite est infinie.* —

Définition 3.24 – Limite infinie en $\pm\infty$

Soient $\mathcal{D}$ une partie *non majorée* de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si
$$\forall A > 0, \quad \exists M > 0, \quad \forall u \in]M, +\infty[\cap\mathcal{D}, \quad f(u) > A.$$



Bien sûr, il existe une définition analogue pour « tendre vers $+\infty$ en $-\infty$ » (pouvez-vous l'imaginer ?), une autre pour « tendre vers $-\infty$ en $-\infty$ », etc.

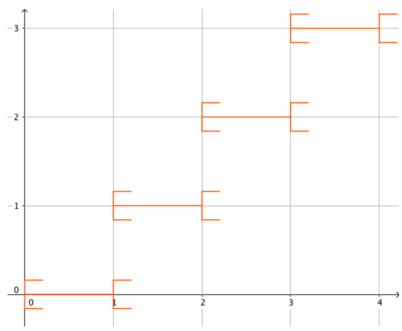
2.4. Limite à droite ou à gauche. —

Définition 3.25 – Limite à droite, limite à gauche

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, x_0 un point de l'adhérence $\mathbf{Adh}(\mathcal{D})$, ℓ un nombre réel.
On dit que f admet ℓ pour *limite à droite* en x_0 si $x_0 \in \mathbf{Adh}(\mathcal{D}\cap]x_0, +\infty[)$ et si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall u \in]x_0, x_0 + \delta[\cap\mathcal{D}, \quad |f(u) - \ell| < \varepsilon.$$
On dit que f admet ℓ pour *limite à gauche* en x_0 si $x_0 \in \mathbf{Adh}(\mathcal{D}\cap] - \infty, x_0[)$ et si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall u \in]x_0 - \delta, x_0[\cap\mathcal{D}, \quad |f(u) - \ell| < \varepsilon.$$

On notera : $f(u) \xrightarrow[u \to x_0^+]{} \ell$ pour dire que f admet ℓ pour limite à droite en x_0.

Exemple 3.26. — Si f est la fonction partie entière et si $x_0 = 2$, alors f admet 1 pour limite à gauche en x_0 et 2 pour limite à droite en x_0.



Remarque 3.27 **(remarque théorique).** — Dire que f admet ℓ pour limite à droite en x_0, c'est dire que la restriction $f\big|_{\mathcal{D}\cap]x_0,+\infty[}$ admet ℓ pour limite « tout court » en x_0. Cette remarque permet d'obtenir, à partir des théorèmes généraux sur les limites « tout court » (par exemple ceux que nous évoquerons plus loin : somme de limites, théorèmes d'encadrement, etc), des théorèmes qui concernent les limites à droite et à gauche.

Voyons dans quelle mesure l'étude des limites à droite et à gauche permet d'aborder l'étude des limites « tout court ».

Proposition 3.28 – Limite à droite et à gauche VS limite « tout court »

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, x_0 un point de l'adhérence $\boldsymbol{Adh}(\mathcal{D})$, ℓ un nombre réel.

(a) On suppose que x_0 n'appartient pas à $\mathcal{D}$.
La fonction f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si elle admet ℓ pour limite à droite et à gauche en x_0.

(b) On suppose que x_0 appartient à $\mathcal{D}$.
La fonction f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si :
- *d'une part, on a $\ell = f(x_0)$,*
- *d'autre part, f tend vers ℓ à droite et à gauche en x_0.*

Exemple 3.29. — Revenons aux fonctions

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 1 \end{array}$$

La fonction g relève du cas (a) : elle admet 1 pour limites à gauche et à droite en zéro, donc elle tend vers 1 en zéro.

La fonction f, en revanche, relève du cas (b) : elle admet 1 pour limites à gauche et à droite en zéro, mais elle est définie en zéro et $f(0) \neq 1$: ainsi, elle n'a pas de limite (« tout court ») en zéro.

Exercice 3.4. —
1. Étudier l'existence d'une limite quand x tend vers 2 à la quantité $\frac{|x-2|}{x-2}$.
2. Étudier l'existence d'une limite quand x tend vers 3 à la quantité $\frac{|x-2|}{x-2}$.
3. Étudier l'existence d'une limite quand x tend vers 2 à la quantité $(-1)^{E(-x^2)}$.

Démonstration de la proposition 3.28. — Constatons d'abord qu'indépendamment de la question de savoir si x_0 appartient à $\mathcal{D}$, l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall u \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathcal{D}, \quad |f(u) - \ell| < \varepsilon.$$

implique évidemment

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall u \in]x_0 - \delta, x_0[\cap \mathcal{D}, \quad |f(u) - \ell| < \varepsilon$$

et son analogue « à droite ». Ainsi, si f tend vers ℓ en x_0, alors elle admet ℓ pour limite à gauche et à droite en x_0.

On remarque de plus que si f tend vers ℓ en x_0 et si x_0 appartient à $\mathcal{D}$, on doit avoir $\ell = f(x_0)$ (voir la remarque page 56).

(a) Supposons que x_0 n'appartienne pas à $\mathcal{D}$ et que f admette ℓ pour limite à droite et à gauche en x_0. Alors nous savons :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_1 > 0, \quad \forall u \in]x_0 - \delta_1, x_0[\cap \mathcal{D}, \quad |f(u) - \ell| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_2 > 0, \quad \forall u \in]x_0, x_0 + \delta_2[\cap \mathcal{D}, \quad |f(u) - \ell| < \varepsilon$$

et nous voulons montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall u \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathcal{D}, \quad |f(u) - \ell| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$.

D'après nos deux hypothèses, il existe $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ vérifiant : $\begin{cases} \forall u \in]x_0 - \delta_1, x_0[\cap \mathcal{D}, & |f(u) - \ell| < \varepsilon, \\ \forall u \in]x_0, x_0 + \delta_2[\cap \mathcal{D}, & |f(u) - \ell| < \varepsilon. \end{cases}$

Notons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Alors $\begin{cases}]x_0 - \delta, x_0[\text{ est contenu dans }]x_0 - \delta_1, x_0[, \\ ]x_0, x_0 + \delta[\text{ est contenu dans }]x_0, x_0 + \delta_2[. \end{cases}$

D'autre part, comme x_0 n'appartient pas à $\mathcal{D}$, on a :

$$]x_0-\delta,x_0+\delta[\cap\mathcal{D}=(]x_0-\delta,x_0[\cap\mathcal{D})\cup(]x_0,x_0+\delta[\cap\mathcal{D})$$

On en déduit

$$\forall u\in]x_0-\delta,x_0+\delta[\cap\mathcal{D},\quad |f(u)-\ell|<\varepsilon.$$

si bien que f tend vers ℓ en x_0.

(b) Supposons que x_0 appartienne à $\mathcal{D}$, que f admette ℓ pour limite à droite et à gauche en x_0, et qu'on ait de plus $\ell=f(x_0)$.

Soit $\varepsilon>0$. En reprenant le raisonnement de la partie (a), on constate qu'il existe $\delta>0$ vérifiant la propriété suivante :

pour tout u appartenant soit à $\mathcal{D}\cap]x_0,x_0+\delta[$ soit à $\mathcal{D}\cap]x_0,x_0+\delta[$, on a $|f(u)-\ell|<\varepsilon$.

Mais pour $u=x_0$, on a $|f(u)-\ell|=0$, donc on a aussi $|f(u)-\ell|<\varepsilon$. Ainsi pour tout u appartenant à $\mathcal{D}\cap]x_0-\delta,x_0+\delta[$ on a $|f(u)-\ell|<\varepsilon$. Nous avons montré que f a pour limite ℓ en x_0.

□

3. Caractérisation séquentielle

3.1. Le théorème. —

Théorème 3.30 – Caractérisation séquentielle des limites de fonctions

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, x_0 un point de l'adhérence $\boldsymbol{Adh}(\mathcal{D})$, et ℓ un réel. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(a) La fonction f tend vers ℓ en x_0.

(b) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{D}$ qui converge vers x_0, la suite image $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Ce théorème est un outil très important, car il ramène l'étude des limites de fonctions à celle des limites de suites.

Démonstration. —

- Montrons que (a) implique (b). Supposons que f tende vers ℓ en x_0, considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{D}$ qui converge vers x_0. Nous voulons montrer que la suite image $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon>0$. Nous devons montrer que $|f(u_n)-\ell|<\varepsilon$ à partir d'un certain rang.

  Puisque f tend vers ℓ en x_0, il existe $\delta>0$ vérifiant :

  $$\forall u\in\mathcal{D},\qquad (\quad |u-x_0|<\delta\quad\Longrightarrow\quad |f(u)-\ell|<\varepsilon\quad).$$

  Mais puisque la suite (u_n) converge vers x_0, il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ vérifiant :

  $$\forall n\geq N,\quad |u_n-x_0|<\delta.$$

  Fixant un tel N et combinant ces deux informations, on obtient

  $$\forall n\geq N,\quad |f(u_n)-\ell|<\varepsilon.$$

  Cela prouve bien que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
- Montrons que (b) implique (a) en raisonnant par contraposée. Supposons que f ne tende pas vers ℓ en x_0. Nous devons montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{D}$ qui converge vers x_0 mais pour laquelle la suite image $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ.

  Dire que f ne tend pas vers ℓ en x_0, c'est dire qu'il existe $\varepsilon>0$ vérifiant :

  $$\forall\delta>0,\exists u\in]x_0-\delta,x_0+\delta[\cap\mathcal{D},\quad \text{tel que } |f(u)-\ell|\geq\varepsilon. \tag{$\star$}$$

Pour chaque n de $\mathbb{N}$, appliquons $(\star)$ avec $\delta = \frac{1}{n+1}$: on obtient l'existence d'un élément de $\mathcal{D}$ dans l'intervalle $]x_0 - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}[$; dans la mesure où cet élément dépend de δ, donc de n, notons-le u_n.

On obtient alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_0 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq x_0 + \frac{1}{n+1},$$

et qui de plus vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - \ell| \geq \varepsilon.$$

L'encadrement ci-dessus montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 ; mais la seconde inégalité montre qu'il est impossible que $(f(u_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ (sinon, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtiendrait $0 \geq \varepsilon$).

□

***Exercice 3.5* (Pour travailler la démonstration).** — Démontrer les versions de la caractérisation séquentielle lorsqu'il est question de limites infinies, de limites en $\pm\infty$:

1. Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, x_0 un point de l'adhérence $\mathbf{Adh}(\mathcal{D})$. La fonction f tend vers $+\infty$ en x_0 si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{D}$ qui converge vers x_0, la suite image $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. Soient $\mathcal{D}$ une partie non majorée (resp. non minorée) de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, ℓ un nombre réel. La fonction f tend vers ℓ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si et seulement si pour toute suite (u_n) de points de $\mathcal{D}$ qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), la suite image $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

3.2. Première application : montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point. — La caractérisation séquentielle peut se reformuler de la manière suivante : dire que f tend vers ℓ en x_0, c'est dire que lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'approche de x_0, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ s'approche de ℓ, et ce *quelle que soit la façon dont* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'approche de* x_0.

Avec les notations du théorème ci-dessus,
s'il existe deux suites qui convergent vers x_0 mais dont les suites-image ont des limites différentes,
alors f n'a pas de limite en x_0.

Exemple 3.31. — Revenons à la fonction

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin\in \mathbb{Q} \end{cases}$$

et montrons que φ n'a pas de limite en $x_0 = 77$.

Pour chaque n de $\mathbb{N}^\star$, notons : $u_n = 77 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 77 + \frac{\sqrt{2}}{n}$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent toutes les deux vers $x_0 = 0$.
Mais pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, on a : $u_n \in \mathbb{Q}$ et $v_n \notin \mathbb{Q}$, d'où l'on déduit : $\varphi(u_n) = 1$ et $\varphi(v_n) = 0$.
En conséquence, la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 1 et la suite $(\varphi(v_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0.
Si φ avait une limite ℓ en x_0, ces deux suites devraient converger vers ℓ : ainsi φ ne peut pas avoir de limite en x_0.

Exemple 3.32. — Considérons la fonction

$$f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(\tfrac{1}{x}).$$

Montrons que f n'a pas de limite en zéro.

Pour chaque n de $\mathbb{N}^\star$, notons : $u_n = \dfrac{1}{n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ne s'annulent pas et convergent toutes les deux vers $x_0 = 0$,
mais pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, on a : $f(u_n) = \sin(n\pi) = 0$ tandis que $f(v_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$.

En conséquence, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0 et la suite $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 1.
Si f avait une limite ℓ en x_0, ces deux suites devraient converger vers ℓ : ainsi f ne peut pas avoir de limite en x_0.

Exercice 3.6. — 1. Vérifier que la fonction $x \mapsto \sin\left(\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ n'a pas de limite en zéro.

2. Vérifier que la fonction $x \mapsto x\cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

3.3. Deuxième application : théorèmes généraux sur les limites de fonctions. —

3.3.1. *Unicité de la limite.* —

Proposition 3.33 – Unicité de la limite pour les limites de fonctions

Soient $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, x_0 un point de $\mathbf{Adh}(\mathcal{D})$ et ℓ, ℓ' deux réels. Si f tend vers ℓ en x_0 et tend aussi vers ℓ' en x_0, alors $\ell = \ell'$.

Démonstration. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathcal{D}$ qui converge vers x_0.
Comme f tend vers ℓ en x_0, la caractérisation séquentielle assure que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Mais comme f tend vers ℓ en x_0, la caractérisation séquentielle assure que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ'.
Compte tenu de l'unicité de la limite dans le cas des suites, on a nécessairement $\ell = \ell'$. □

Opérations sur les limites. —

Proposition 3.34 – Opérations sur les limites : somme, produit, quotient

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$, x un point de l'adhérence $\boldsymbol{Adh}(\mathcal{D})$ et ℓ, ℓ' deux réels.
On suppose que f tend vers ℓ en x et que g tend vers ℓ en x. Alors
- *la somme $f+g$ tend vers $\ell+\ell'$ en x,*
- *le produit fg tend vers $\ell\ell'$ en x,*
- *Si $\ell' \neq 0$, alors le quotient $\frac{f}{g}$ est bien défini au voisinage de x et tend vers $\frac{\ell}{\ell'}$ en x.*

Proposition 3.35 – Opérations sur les limites : composition

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ deux parties de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$, g une fonction définie sur $\mathcal{E}$,
x_0 un point de l'adhérence $\boldsymbol{Adh}(\mathcal{D})$, y_0 un point de l'adhérence $\boldsymbol{Adh}(\mathcal{E})$ et ℓ un réel.

$$\text{Si } f(u) \xrightarrow[u\to x_0]{} y_0 \quad \text{et} \quad g(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \ell, \qquad \text{alors} \quad g(f(u)) \xrightarrow[u\to x_0]{} \ell.$$

Démonstration. — Nous ne montrons que les assertions qui concernent la somme et le quotient.
- Pour vérifier que $f+g$ tend vers $\ell+\ell'$ en x_0, il suffit de vérifier l'assertion suivante :

  Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{D}$ qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n)+g(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell+\ell'$.

  Mais si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $\mathcal{D}$ qui converge vers x_0, les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. Le résultat voulu est donc conséquence immédiate du théorème déjà connu sur les sommes de suites convergentes.
- Supposons $\ell' \neq 0$.

- Vérifions d'abord que pour u « assez proche de x_0 » on a $g(u) \neq 0$, ce qui avec des quantificateurs s'écrit :

  Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout u de $\mathcal{D}$ vérifiant $|u - x| < \delta$, on ait $g(u) \neq 0$.

  Le plus simple est d'utiliser directement la définition de la limite, car nous avons fait l'hypothèse suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\quad \forall u \in \mathcal{D},\quad \left(|u - x| < \delta \implies \quad f(u) \in]\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon[\quad\right).$$

  En l'utilisant avec avec $\varepsilon = |\ell'| > 0$ et en remarquant que l'intervalle $]\ell' - |\ell'|, \ell' + |\ell'|[$ ne contient pas zéro [3], on obtient le résultat voulu.
- Vérifions maintenant que $\frac{f}{g}$ tend vers $\frac{\ell}{\ell'}$ en x_0, en vérifiant l'assertion suivante :

  Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{D}$ qui converge vers x_0, la suite $\left(\frac{f(u_n)}{g(u_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.

  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $\mathcal{D}$ qui converge vers x_0. On sait que les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ' ; de plus, compte tenu du premier point, on sait qu'on a $g(u_n) \neq 0$ à partir d'un certain rang. Si nous notons n_0 un tel rang, alors la quantité $\frac{f(u_n)}{g(u_n)}$ est donc bien définie à partir du rang n_0. D'après le théorème déjà démontré sur les limites de suites-quotient, elle converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$ quand n tend vers $+\infty$.

□

Exercice 3.7. — Savez-vous démontrer les assertions qui concernent le produit et la composition ?

3.3.2. *Théorèmes de comparaison et d'encadrement.* —

Proposition 3.36 – Théorème de comparaison, version « fonctions »

*Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f, et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$, x_0 un point de l'adhérence **Adh**$(\mathcal{D})$. Supposons réunies les deux conditions suivantes :*
- *pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(u) \leq g(u)$*
- *les fonctions f et g admettent des limites finies en x_0.*

Alors : $\lim\limits_{u\to x_0} f(u) \leq \lim\limits_{u\to x_0} g(u)$.

Démonstration. — Notons ℓ la limite de f en x_0 et ℓ' la limite de g en x_0. Si (u_n) est une suite de points de $\mathcal{D}$ qui converge vers x_0, alors les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ' ; de plus, si pour tout u de $\mathcal{D}$ on a $f(u) \leq g(u)$, alors $f(u_n) \leq g(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Les théorèmes de comparaison pour les limites de suites convergentes imposent alors $\ell \leq \ell'$, comme voulu. □

Remarque 3.37. — La conclusion reste vraie si l'inégalité $f(u) \leq g(u)$ n'est vraie que pour u « proche de x_0 » : on peut remplacer l'hypothèse

« pour tout u de $\mathcal{D}$, $f(u) \leq g(u)$ »

par

« il existe $\delta > 0$ tel que pour tout u de $\mathcal{D}$ vérifiant $|u - x_0| < \delta$, on ait $f(u) \leq g(u)$ ».

3. En effet, lorsque $\ell' > 0$ cet intervalle est égal à $]0, 2\ell'[$ lorsque $\ell' > 0$, lorsque $\ell' < 0$ il est égal à à $]2\ell', 0[$.

Proposition 3.38 – Théorème d'encadrement, version « fonctions »

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f, g et h trois fonctions définies sur $\mathcal{D}$, x_0 un point de l'adhérence $\boldsymbol{Adh}(\mathcal{D})$ et ℓ un réel.
Supposons réunies les deux conditions suivantes :

- *il existe $\delta > 0$ tel que pour tout u de $\mathcal{D}$ vérifiant $|u - x_0| < \delta$, on ait $f(u) \leq g(u) \leq h(u)$*
- *les fonctions f et h tendent vers ℓ en x_0.*

Alors la fonction h tend vers ℓ en x_0.

Exercice 3.8. — Savez-vous le démontrer avec la caractérisation séquentielle ?

Il y a bien sûr des théorèmes de comparaison qui concernent les limites infinies ; nous n'écrirons pas les énoncés.

Pour manipuler les limites de fonctions au quotidien, les théorèmes ci-dessus sont précieux ; les *croissances comparées* qui s'en déduisent sont précieuses aussi. Citons les quatre faits suivants :

$$\forall a > 0, \forall b > 0, \qquad \frac{e^{ax}}{x^b} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty, , \qquad e^{ax}|x|^b \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0, \qquad \frac{\ln(x)^a}{x^b} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0, \qquad x^a\,|\ln(x)|^b \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

(pour la démonstration, voir le feuillet d'exercices).

CHAPITRE 4

CONTINUITÉ

1. Définition et premières propriétés

1.1. Notion de continuité. —

Définition 4.1 – Continuité en un point, continuité sur le domaine de définition

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}$.

- *Continuité en un point du domaine de définition.*
  Soit x_0 un point appartenant à $\mathcal{D}$. On dit que f est continue en x_0 lorsque : $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$.
- *Continuité sur le domaine de définition.*
  On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ lorsqu'elle est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

Comme on l'a vu à la remarque 3.19, lorsque f est définie en x_0, elle ne peut avoir pas avoir d'autre limite (finie) en x_0 que $f(x_0)$; ainsi, dire que f est continue en x_0, c'est simplement dire qu'elle admet une limite (finie) en x_0.

Remarque 4.2 **(La continuité est une notion locale).** —
Si f et g sont deux fonctions définie sur $\mathcal{D}$ et si $x_0 \in \mathcal{D}$,

- On dit que f et g *coïncident au voisinage de* x_0 s'il existe $\delta > 0$ vérifiant : $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $f(x) = g(x)$.
- La continuité est une *propriété locale* : si f et g coïncident au voisinage de x_0, alors f est continue en x_0 si et seulement si g l'est.

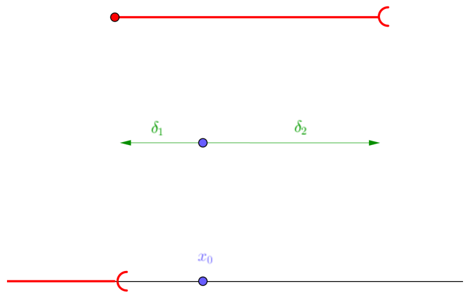
Proposition 4.3 – Caractérisation séquentielle de la continuité

Avec les notations ci-dessus, f est continue en x_0 si et seulement si : pour toute suite (u_n) de points de $\mathcal{D}$ qui tend vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Exemple 4.4. — La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$: nous l'avons montré, non sans peine, dans l'exemple 3.17 du chapitre précédent.

Exemple 4.5. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction partie entière. Soit x_0 un nombre réel.

- Si x_0 est un entier, alors on a $f(u) \xrightarrow[u \to x_0^-]{} x_0 - 1$ et $f(u) \xrightarrow[u \to x_0^+]{} x_0$, donc f n'a pas de limite en x_0 et n'est pas continue en x_0.
- Si x_0 n'est pas un entier, alors f coïncide au voisinage de x_0 avec une fonction constante, donc f est continue en x_0.



En effet, notons $n_0 = E(x_0)$, $\delta_1 = x_0 - n_0$ et $\delta_2 = 1 - \delta_1 = (n_0 + 1) - x_0$.
Les deux nombres δ_1 et δ_2 sont strictement positifs puisque x_0 n'est pas entier ;
si on choisit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, alors $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ est contenu dans l'intervalle $]n_0, n_0 + 1[$, qui ne contient aucun entier.
Ainsi f coïncide sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ avec la fonction constante de valeur n_0.

Exemple 4.6. — Considérons la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{Q}$,

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \ , \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \ . \end{cases} \end{array}$$

Montrons que φ n'est continue en aucun point.

Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$. Montrons que φ n'est pas continue en x_0, en utilisant la caractérisation séquentielle.

On rappelle que si A est une partie dense de $\mathbb{R}$, alors il existe une suite de points de A qui converge vers x_0 (voir, dans le fascicule d'exercices, l'exercice 6 du chapitre 2).

La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ implique donc l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels qui converge vers x_0, tandis que la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ implique celle d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres irrationnels qui converge vers x_0.

On a alors $\varphi(u_n) = 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$, tandis que $\varphi(v_n) = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

En conséquence, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers x_0, mais les suites-image $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers des limites différentes.

La fonction φ ne peut donc pas avoir de limite en x_0 : elle ne peut pas être continue en x_0.

1.2. Continuité des fonctions usuelles et opérations sur les fonctions continues. — L'exemple page 55 devrait suffire à montrer que vérifier *à la main* la continuité d'une fonction est souvent très pénible.

En pratique, lorsqu'une fonction est donnée par une expression explicite « relativement simple », il est très courant de discuter sa continuité en s'appuyant

- sur la continuité de certaines fonctions « élémentaires »,
- sur le fait que les opérations usuelles (somme, produit, composition, etc) préservent la continuité.

Nous avons déjà démontré que la somme de deux fonctions ayant des limites en x_0 admet une limite en x_0 et plusieurs résultats analogues, d'où l'on déduit par exemple :

Proposition 4.7 – Opérations sur les fonctions continues

1. Somme, produit, quotient.
   Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$. Si f et g sont continues sur $\mathcal{D}$, alors :
   - *Les fonctions $f+g$ et fg sont continues sur $\mathcal{D}$.*
   - *La fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur l'ensemble $\{x \in \mathcal{D} \ / \ g(x) \neq 0\}$.*
2. Composition.
   Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont deux parties de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$, g une fonction continue sur $\mathcal{E}$. Si f est continue sur $\mathcal{D}$ et g est continue sur $\mathcal{E}$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur $\mathcal{D}$.

Il n'y a rien à démontrer compte tenu des propositions 3.34 et 3.35.

Proposition 4.8 – Exemples de fonctions continues

- *La fonction* $\exp$ *est continue sur* $\mathbb{R}$
- *La fonction* $\ln$ *est continue sur* $\mathbb{R}_\star^+$
- *Pour tout α de $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}^+\star$*
- *Les fonctions* $\sin$ *et* $\cos$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$
- *Pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$*
- *Pour tout entier naturel impair n, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$*
- *Pour tout entier naturel pair n, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.*

Remarque 4.9. — Ce résultat permet d'obtenir, par exemple, la continuité de toute fonction polynomiale : si $a_0, a_1, ..., a_n$ sont des nombres réels, alors pour tout k de $\{0, ..n\}$, la fonction $x \mapsto a_k \cdot x^k$ est continue sur $\mathbb{R}$ (grâce au théorème sur le produit et à la continuité des constantes), si bien que la fonction $x \mapsto a_0 + a_1 \cdot x ... a_n \cdot x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ (par somme).

Remarque 4.10. — En combinant le résultat ci-dessus et les théorèmes du paragraphe précédent, on peut justifier la continuité de beaucoup de fonctions : par exemple, on peut affirmer que la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\sin\left(x^3+\ln(x^2+1)\right)}{e^{7x^8-\sqrt[3]{\ln(x^4+27)}}} \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}$, sans autre justification que le fait qu'elle est obtenue « par opérations usuelles sur les fonctions continues ».

1.3. Continuité à droite ou à gauche. —

Définition 4.11 – Continuité à droite et à gauche

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, x_0 un point appartenant au domaine $\mathcal{D}$.
- On dit que f est continue à droite en x_0 lorsque : $f(u) \xrightarrow[u \to x_0^+]{} f(x_0)$.
- On dit que f est continue à gauche en x_0 lorsque : $f(u) \xrightarrow[u \to x_0^-]{} f(x_0)$.

Par exemple, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction partie entière et si n_0 est un élément de $\mathbb{Z}$, alors f est continue *à droite* en n_0, mais *pas à gauche* en n_0.

Attention. — La définition de la continuité à gauche en x_0 n'est pas équivalente au fait d'avoir une limite à gauche en x_0. Pour l'exemple de la partie entière ci-dessus, si $n_0 \in \mathbb{Z}$, alors f a bien une limite à gauche en n_0, mais elle n'est pas continue à gauche en n_0 puisque cette limite n'est pas égale à $f(n_0)$.

La partie (b) de la proposition 3.28 fournit le critère suivant :

Proposition 4.12 – Continuité à droite et à gauche VS continuité tout court

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, x_0 un point appartenant au domaine $\mathcal{D}$. La fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en x_0.

2. Théorème des valeurs intermédiaires

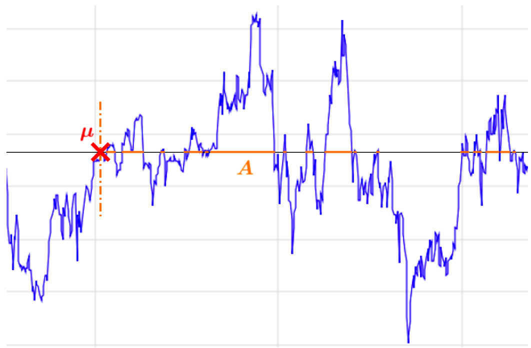
Théorème 4.13 – Théorème des valeurs intermédiaires, version « concrète »

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux éléments de I avec $a < b$. Si

- *f est continue sur I,*
- *$f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$,*

alors il existe au moins un élément c de $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration. — Nous allons chercher à construire le « point le plus à gauche de $[a, b]$ où f s'annule », de façon abstraite.



Considérons l'ensemble

$$A = \{x \in [a, b] \quad / \quad f(x) \geq 0\}.$$

L'ensemble A est non vide (puisqu'il contient b) et minoré (par a), donc A admet une borne inférieure. Notons-la μ ; nous allons montrer que $f(\mu) = 0$.

- Montrons que $f(\mu) \geq 0$ en montrant qu'il y a « aussi près qu'on veut de μ des points de A », dont l'image par f est positive ; en utilisant la continuité de f on en déduira que $f(\mu)$ est positif. .

  Rappelons que compte tenu de caractérisation de la borne inférieure, on a :

  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists u \in A, \quad \mu \leq u < \mu + \varepsilon \tag{$\star$}$$

  En utilisant la définition de la borne inférieure, on peut construire une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans A convergeant vers μ : pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$, en appliquant $(\star)$ avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on obtient un élément un élément u_n de A vérifiant : $\mu \leq u_n \leq \mu + 1/n$. D'après le théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ ainsi définie converge vers μ.

Grâce à la continuité de f en μ et à la caractérisation séquentielle, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\mu)$ Or, pour tout $n \geq 1$, on a $f(u_n) \geq 0$ car $u_n \in A$. On en déduit, par passage à la limite, que $f(\mu) \geq 0$.

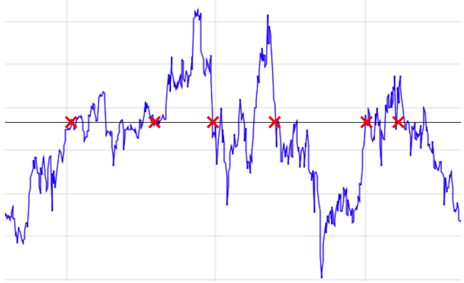
- Montrons que $f(\mu) \leq 0$.
  — Si $m = a$ alors $f(m) = f(a) \leq 0$.

  — Si $m > a$, comme m est un minorant de A, aucun nombre strictement inférieur à μ n'appartient à A, et
$$\forall x \in [a, \mu[, \quad f(x) < 0.$$
En utilisant la continuité de f, on sait que $f(x) \xrightarrow[x\to\mu^-]{} f(\mu)$. De l'inégalité précédente valable « à gauche au voisinage de μ » on peut donc déduire $f(\mu) \leq 0$.

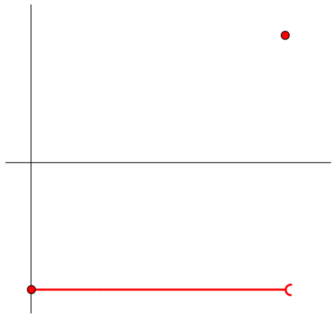
□

***Remarque 4.14* (Pour bien utiliser le théorème).** —

- Le théorème des valeurs intermédiaires est bien sûr très important, mais il est abstrait : il ne dit pas *où* trouver un c tel que $f(c) = 0$. Voir la remarque qui suit le deuxième exemple ci-dessous.
- Le théorème assure l'existence d'*au moins une solution à l'équation* $f(x) = 0$; il peut y en avoir plusieurs.



- La continuité de f est une hypothèse essentielle : la conclusion du théorème est fausse si f n'est pas continue. Par exemple, si f est la fonction $x \mapsto E(x) - \frac{1}{2}$,
on a $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, mais l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution dans $[0, 1]$.



Lorsqu'on voudra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, on n'oubliera donc *jamais* de vérifier la continuité de f sur un intervalle utile, quitte à ce que la justification soit très rapide lorsque $f(x)$ est donné par une formule simple.

***Exemple 4.15* (Une application classique).** — Considérons une fonction
$$f \quad : \quad [0,1] \quad \to \quad [0,1]$$
et supposons f continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Montrons qu'il existe un élément x de $[0, 1]$ vérifiant $f(x) = x$.

Il s'agit de vérifier que l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution dans $[0, 1]$,
mais cette équation revient à : à $f(x) - x = 0$;
on peut donc espérer conclure en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

Introduisons la fonction

$$\begin{array}{cccc} g & : & [0,1] & \to & [0,1] \\ & & x & \mapsto & f(x)-x. \end{array}$$

- La fonction g est continue sur $[0,1]$: c'est la différence $f - \mathrm{id}_{[0,1]}$ de deux fonctions continues.
- On a $g(0) = f(0)$, donc $g(0)$ est positif.
- On a $g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1$, donc $g(1)$ est négatif.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un élément c de $[0,1]$ vérifiant $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

Théorème 4.16 – Théorème des valeurs intermédiaires, version synthétique

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, alors l'image de f est un intervalle.

Démonstration. — Rappelons que l'image de f est l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} \ / \ \exists x \in I, \ y = f(x)\}$.

Nous devons montrer que c'est un intervalle. Rappelons que cela signifie :

Pour tous u et v dans $\mathbf{Im}(f)$, si $u \leq v$, alors tous les nombres compris entre u et v sont aussi dans $\mathbf{Im}(f)$.

Soient u et v dans $\mathbf{Im}(f)$ vérifiant $u \leq v$ et w un nombre compris entre u et v. Nous devons montrer que w appartient à $\mathbf{Im}(f)$, donc que l'équation $f(x) = w$ admet au moins une solution dans I. On introduit pour cela

$$\begin{array}{cccc} g & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & z & \mapsto & f(z)-w \end{array}$$

Comme u est dans l'image de f, on peut écrire $u = f(a)$ avec $a \in I$; de même on peut écrire $v = f(b)$ avec $b \in I$. On remarque que $g(a) = u - w \leq 0$ et $g(b) = v - w \geq 0$.

Comme I est un intervalle, l'intervalle $J := [\min\{a,b\}, \max\{a,b\}]$ est inclus dans I et on peut donc considérer $\varphi = g_{|J}$.

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à φ, on obtient l'existence d'un élément c de J (qui appartient donc aussi à I) vérifiant $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = w$. □

Exemple 4.17 **(Existence de solutions réelles aux équations polynomiales de degré impair.)**

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. Montrons que P admet au moins une racine réelle.

Considérons la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & P(x). \end{array}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (voir page 67). Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'ensemble $I = \mathbf{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}, \ \exists x \in \mathbb{R}, \ y = P(x)\}$ est un intervalle non vide.

On constate alors que $I = \mathbb{R}$, car :

- la fonction f tend soit vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$, soit vers $-\infty$ en $+\infty$ et vers $+\infty$ en $-\infty$ [(1)].
- une fonction qui tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ ne peut pas être majorée (voir page 57), donc I n'est pas majoré, et de même une fonction qui tend vers $-\infty$ en $\pm\infty$ ne peut pas être minorée, donc I n'est pas minoré ;
- le seul intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne soit ni majoré, ni minoré est $\mathbb{R}$ tout entier.

---

1. En effet, si nous notons n le degré de P, il existe des réels $a_0, \ldots a_n$ (avec $a_n \neq 0$) vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

d'où l'on déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right),$$

ce qui montre (par opérations sur les limites) que $f(x)$ admet une limite quand x tend vers $\pm\infty$ et que cette limite est la même que celle de $a_n \cdot x^n$. Dans la mesure où n est impair, lorsque $a_n > 0$ on a donc $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm\infty$, tandis que lorsque $a_n < 0$ on a $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \mp\infty$.

Nous avons montré l'égalité $\mathbf{Im}(f) = \mathbb{R}$: ainsi f est surjective. En particulier, 0 appartient à $\mathbf{Im}(f)$ et l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Remarque 4.18. — Pour les polynômes de degré supérieur ou égal à 5, il est *rigoureusement impossible* (on peut *démontrer* qu'il est impossible) d'exprimer les solutions de l'équation $P(x) = 0$ en fonction des coefficients de P à l'aide d'une formule utilisant les quatre opérations, les racines n-èmes, etc.

3. Théorème des bornes atteintes

Théorème 4.19 – Théorème des bornes atteintes

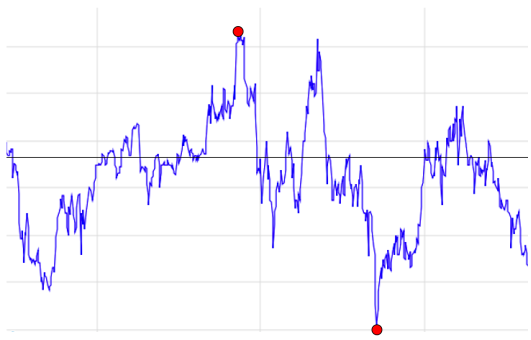
Soient a et b deux réels avec $a < b$.
Si f est une fonction
- *définie sur le segment $[a, b]$,*
- *continue sur le segment $[a, b]$,*

alors :

(a) la fonction f est bornée,

(b) elle admet un maximum global sur $[a, b]$: il existe $x_{\max} \in [a, b]$ vérifiant : $\forall x \in [a, b], f(x) \leq f(x_{\max})$,

(c) elle admet un minimum global sur $[a, b]$: il existe $x_{\min} \in [a, b]$ vérifiant : $\forall x \in [a, b], f(x) \geq f(x_{\min})$.



Remarque 4.20. — Ce résultat est l'une des clefs de voûte de l'analyse, mais il est abstrait : il ne donne
- aucun renseignement sur la valeur de $\max(f)$ et $\min(f)$,
- aucun renseignement sur les endroits où ces bornes sont atteintes. Il peut d'ailleurs exister plusieurs points distincts où f atteint un maximum global, et plusieurs points distincts où f atteint un minimum global.

Démonstration. — Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$. Nous allons montrer que
- la fonction f est majorée ;
- elle admet un maximum global sur $[a, b]$.

- *Étape 1 : f est majorée.*

  Supposons f non-majorée, ce qui avec des quantificateurs s'écrit
  $$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists u \in [a, b], \quad f(u) > A.$$
  Pour chaque n de $\mathbb{N}$, appliquons cette assertion avec $A = n$:
  on obtient l'existence d'un élément de $[a, b]$, qui dépend de n et qu'on peut donc noter u_n, qui vérifie : $f(u_n) > n$.

  Par conséquent, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ qui vérifie
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) > n.$$
  La suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend alors nécessairement vers $+\infty$.

Une chose pareille ne pourrait pas arriver si (u_n) était convergente :
si elle convergeait vers un nombre μ, le nombre μ appartiendrait à $[a, b]$;
or f est continue en μ, la caractérisation séquentielle imposerait alors à $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de converger vers $f(\mu)$, pas vers $+\infty$.
Bien sûr, la suite (u_n) n'est pas forcément convergente. Mais elle est bornée, et nous savons obtenir abstraitement des suites convergentes à partir de suites bornées...

La suite (u_n) est bornée, puisque tous ses termes appartiennent à $[a, b]$.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite convergente.
Il existe donc une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Notons μ la limite de $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nous sommes devant la situation suivante :
— La suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers μ et f est continue en μ, donc la suite $(f(v_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\mu)$;
— La suite $(f(v_k))_{k\in\mathbb{N}} = \left(f(u_{\varphi(k)})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$, donc tend aussi vers $+\infty$.

C'est manifestement contradictoire, donc l'hypothèse « f non-majorée » est absurde.

- *Étape 2 : f admet sur $[a, b]$ un maximum global.*

Puisque f est majorée, l'ensemble $E = \{f(x),\ x \in [a, b]\}$ est majoré ; il est de plus non-vide (il contient $f(a)$) ; il admet donc une borne supérieure. Notons $M = \sup(E)$; on sait que M est un majorant de E, donc :

$$\forall x \in [a, b],\ f(x) \leq M.$$

Nous allons montrer qu'il existe un élément $x_{\max}$ de $[a, b]$ vérifiant $f(x_{\max}) = M$.

D'après la caractérisation de la borne supérieure, nous savons que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists y \in E, \quad M - \varepsilon < y \leq M.$$

autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists u \in [a, b], \quad M - \varepsilon < f(u) \leq M. \qquad (\star)$$

Pour chaque n de $\mathbb{N}$, appliquons cette assertion avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$: on obtient l'existence d'un élément de $[a, b]$, qui dépend de n et qu'on peut donc noter u_n, qui vérifie : $M - \frac{1}{n+1} < f(u_n) \leq M$.

Par conséquent, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M - \frac{1}{n+1} < f(u_n) \leq M.$$

La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ainsi vers M.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait, en notant μ sa limite, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait vers $f(\mu)$,
(grâce à continuité de f en μ et à la caractérisation séquentielle) ;
on aurait donc $M = f(\mu)$ et nous aurions bien montré l'existence d'un point où f atteint la valeur μ.
Comme précédemment, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas forcément, mais il y a un substitut à base de suites extraites...

La suite (u_n) est bornée, puisque tous ses termes appartiennent à $[a, b]$.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite convergente.
Il existe donc une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Notons $x_{\max}$ la limite de $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nous sommes devant la situation suivante :
— La suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_{\max}$ et f est continue en $x_{\max}$, donc $(f(v_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_{\max})$;
— La suite $(f(v_k))_{k\in\mathbb{N}} = \left(f(u_{\varphi(k)})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers M : elle converge vers M.

On a donc $f(x_{\max}) = M$ et f atteint en $x_{\max}$ un maximum global.

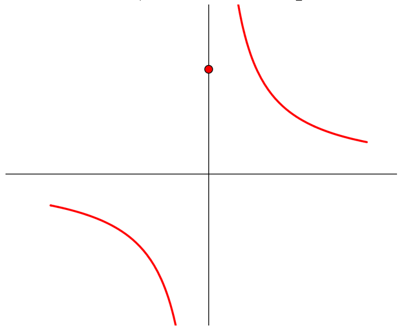
Le fait que f soit minorée et admette un minimum global s'obtient de la même manière, ou en appliquant à la fonction $(-f)$ le résultat que nous allons montrer, puisque f est minorée si et seulement si $(-f)$ est majorée et admet un minimum global si et seulement si $(-f)$ admet un maximum global. □

Attention. — Les deux hypothèses sont nécessaires :

- Si le domaine de définition n'est pas un segment, alors aucune des conclusions du théorème n'est garantie. Par exemple, la fonction $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, mais n'est ni majorée ni minorée (et n'a bien sûr ni minimum ni maximum global).
- Si f est définie sur $[a,b]$ mais n'est pas continue, alors aucune des conclusions du théorème n'est garantie. Par exemple, la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 99 \text{ si x} = 0 \end{cases} \end{array}$$

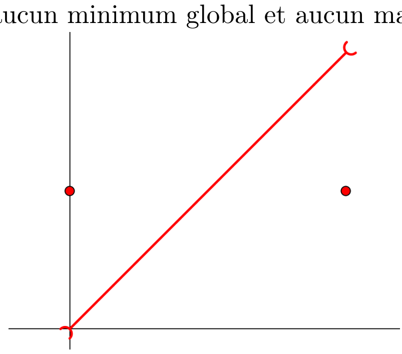
est définie sur $[-1,1]$ mais pas continue en zéro, et elle n'est pas bornée.



Même si f est bornée, lorsqu'elle n'est pas continue elle peut ne pas atteindre ses bornes supérieure et inférieure : la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} x \text{ si } x \in]0,1[\\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = 1, \end{cases} \end{array}$$

est bornée mais n'admet sur $[0,1]$ aucun minimum global et aucun maximum global.



Exemple 4.21. — Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} g & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x^{15}-9x^8+7x^3+2}{(x+4)(x-3)(x-5)} \end{array}$$

La fonction g est continue sur le segment $[0,1]$, puisque c'est le quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$ (il ne s'annule qu'en -2, 3 et 5).

Le théorème des bornes atteintes permet donc d'affirmer qu'elle est bornée et qu'il existe des points $x_{\max}$ et $x_{\min}$ de $[0,1]$ où f atteint respectivement un maximum global et un minimum global.

Cependant, il n'est pas facile de trouver par un simple calcul les valeurs de $\max(g)$ et $\min(g)$ et des exemples de points où ces valeurs sont atteintes.

Exemple 4.22. — Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction périodique et continue, alors f est bornée et il existe une infinité de points où f atteint sa valeur maximale et sa valeur minimale. En effet, si f est T-périodique ($T > 0$), alors la restriction

$$g \ : \ \begin{array}{ccc} [0,T] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est définie et continue sur le segment $[0,T]$, donc (par le théorème des bornes atteintes) f est bornée et il existe des éléments $x_{\min}$ et $x_{\max}$ de $[0,T]$ vérifiant : $\forall u \in [0,T], \ f(x_{\min}) \leq f(u) \leq f(x_{\max})$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x_{\min}) \leq f(u) \leq f(x_{\max}).$$

En effet, si $x \in \mathbb{R}$ est fixé, il existe $u \in [0,T[$ et $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $x = u + nT$ (il suffit de poser $n = E(\frac{x}{T})$ et $u = x - nT$). On a alors $f(x) = f(u + nT) = f(u)$, si bien que $f(x_{\min}) \leq f(u) \leq f(x_{\max})$.

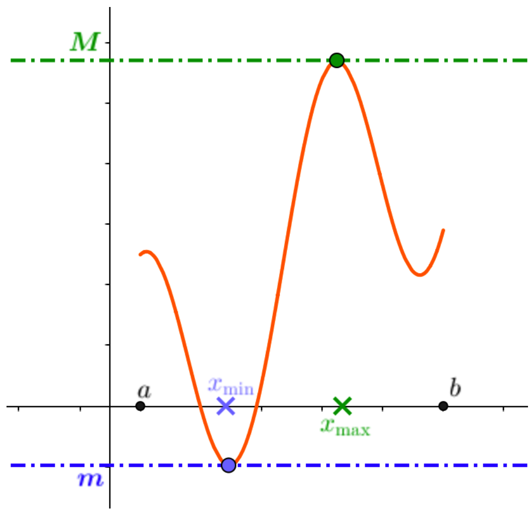
Ainsi, f atteint un minimum global en $x_{\min}$, mais aussi en $x_{\min} + T$, en $x_{\min} + 2T$, etc.

Théorème 4.23 – Théorème des bornes atteintes, version synthétique

Si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors l'image de f est un segment (intervalle fermé borné).

En effet, dans ce cas, l'image $\mathbf{Im}(f) = f([a,b])$ de f est un intervalle compte tenu du théorème des valeurs intermédiaires et du fait que $[a,b]$ est un intervalle.

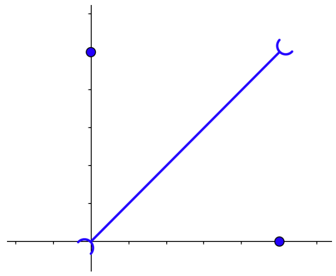
Le théorème des bornes atteintes permet d'affirmer que $\mathbf{Im}(f)$ est borné et admet un plus grand et un plus petit élément. Si nous notons m son plus petit élément et M son plus grand élément, on a alors On peut écrire $f([a,b]) = [f(x_{\min}), f(x_{\max})]\,[m, M]$. □



4. Monotonie et injectivité ; bijection réciproque d'une bijection continue

Rappelons que si f est strictement monotone, alors f est injective.
Il existe des fonctions injectives qui ne sont pas strictement monotones : c'est le cas, par exemple, de la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} x \text{ si } x \in]0,1[, \\ 1 \text{ si } x = 0, \\ 0 \text{ si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$



ou encore de la fonction continue

$$\begin{array}{ccccc} g & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

Mais il n'existe aucune fonction *continue définie sur un intervalle* qui soit injective sans être strictement monotone :

Proposition 4.24 – Continue + injective sur un intervalle $\implies$ strictement monotone

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur I.
Si f est injective, alors f est strictement monotone.

Démonstration. — Supposons que f ne soit pas strictement monotone et montrons qu'il est impossible qu'elle soit injective.

Puisque f n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante, il existe des points a, b, c, d de I vérifiant :

$$\begin{array}{ccc} a < b & \text{mais} & f(a) \geq f(b) \\ c < d & \text{mais} & f(c) \leq f(d). \end{array}$$

Nous introduisons la fonction

$$\begin{array}{ccccc} \varphi & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & f\left((1-t)a + tc\right) - f\left((1-t)b + td\right). \end{array}$$

- On constate que $\varphi(0) = f(a) - f(b) \geq 0$, tandis que $\varphi(1) = f(c) - f(d) \leq 0$.
- La fonction φ est continue sur $[0,1]$ (en effet, f est continue sur I et les fonctions $t \mapsto (1-t)a + tc$ et $t \mapsto (1-t)b + td$ sont affines donc continues sur $[0,1]$; la continuité de φ s'obtient par composition et somme).

On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe un réel t_0 vérifiant : $\varphi(t_0) = 0$, c'est-à-dire

$$f\left((1-t_0)a + t_0c\right) = f\left((1-t_0)b + t_0d\right).$$

Si nous posons $x = (1-t_0)a + t_0c$ et $y = (1-t_0)b + t_0d$, nous avons donc $f(x) = f(y)$.
Mais les nombres x et y sont différents : comme $a < b$, $c < d$ et $t \geq 0$, on a $x < y$.
Ainsi $f(x) = f(y)$ alors que $x \neq y$, ce qui prouve que f ne peut être injective. $\square$

Nous montrons enfin un résultat de *continuité automatique* pour la bijection réciproque d'une bijection continue. Ce résultat technique nous sera utile par la suite, mais il n'est pas facile à établir et ne sera pas d'usage quotidien dans votre première année.

Proposition 4.25 – Continuité automatique de la bijection réciproque

- *I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$,*
- *$f : I \to J$ est une fonction continue et bijective,*

alors la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est automatiquement continue.

Démonstration. — Rappelons que si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et injective, alors $J = \mathbf{Im}(f)$ est un intervalle ; de plus, la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone et a le même sens de variation que f. Dans la suite de cette démonstration, on suppose f strictement croissante et on montre que f^{-1} est automatiquement continue.

Soit y un élément de J. Nous devons montrer que f^{-1} est continue en y.

Supposons que f^{-1} n'est pas continue en y.

Notons $x = f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f. D'après la caractérisation séquentielle, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de J qui converge vers y, mais telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(f^{-1}(v_n)\big)$ ne converge pas vers x.

Rappelons que :

Dire que (u_n) converge vers x, c'est dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $u_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ à partir d'un certain rang.

Nous allons nous appuyer pour poursuivre sur la reformulation suivante de la définition de la limite : [2]

Dire que (u_n) converge vers x, c'est dire que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \notin]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\}$ est fini.

Ainsi,

Dire que (u_n) ne converge pas vers x, c'est dire qu'il existe un $\varepsilon > 0$ pour lequel l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \notin]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\}$ est infini.

Fixons un tel ε. Puisque dire que $u_n \notin]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ revient à dire qu'on a soit $u_n \geq x+\varepsilon$, soit $u_n \leq x-\varepsilon$, il est impossible que les deux ensembles

$$A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \leq x-\varepsilon\} \qquad \text{et} \qquad B = \{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \geq x+\varepsilon\}$$

soient finis.

Compte tenu du fait que f est strictement croissante, on remarque que si n appartient à A, alors $f(u_n) \leq f(x-\varepsilon)$. (la dernière inégalité vient de ce que $x - \varepsilon < x$).

Mais $f(x-\varepsilon)$ est strictement inférieur à $f(x)$: en écrivant $f(x-\varepsilon) = f(x) - \delta$ avec $\delta = f(x) - f(x-\varepsilon) > 0$, et en rappelant que nous avons noté précédemment $v_n = f(u_n)$ et $y = f(x)$, nous avons obtenu le renseignement suivant :

$$\text{Si } A \text{ est infini, alors l'ensemble } \{n \in \mathbb{N} \ / \ v_n < y - \delta\} \text{ est infini.}$$

C'est impossible, compte tenu du fait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y.

C'est donc que B est infini. Mais en écrivant $f(x+\varepsilon) = f(x) + \alpha$ avec $\alpha > 0$, on constate de même que

$$\text{Si } B \text{ est infini, alors l'ensemble } \{n \in \mathbb{N} \ / \ v_n < y + \alpha\} \text{ est infini.}$$

C'est impossible, puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y... et nous avons obtenu une contradiction. $\square$

2. En effet, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\}$ contient tous les entiers à partir d'un certain rang N si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\}$ ne contient que des entiers $< N$, et dans ce cas il est fini.

5. Notion de prolongement par continuité

Définition 4.26 – Prolongement par continuité

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit x_0 un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, mais appartenant à $\mathbf{Adh}(\mathcal{D})$.
On dit que f *admet un prolongement par continuité à* $\mathcal{D} \cup \{x_0\}$ lorsque

- f est continue sur $\mathcal{D}$,
- f admet une limite finie en x_0.

Dans ce cas, en notant ℓ la limite de f en x_0, *le prolongement par continuité de* f *à* $\mathcal{D} \cup \{x_0\}$ est la fonction

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{f} & : & \mathcal{D} \cup \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D} \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases} \end{array}$$

La fonction $\tilde{f}$ est alors continue sur $\mathcal{D} \cup \{x_0\}$.

Dire que f est prolongeable par continuité à $\mathcal{D} \cup \{x_0\}$, c'est dire qu'il existe une fonction *continue* sur $\mathcal{D} \cup \{x_0\}$ dont la restriction avec $\mathcal{D}$ coïncide avec f. Dans ce cas la seule fonction vérifiant cette propriété est $\tilde{f}$.

Exemple 4.27. — La fonction

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}_*^+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x \cdot \ln(x). \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}_\star^+$ et tend (par croissances comparées) vers zéro en zéro. Elle admet donc un prolongement par continuité à $\mathbb{R}^+$: ce prolongement est la fonction

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} x \cdot \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Exemple 4.28. — Voici un exemple plus caricatural : considérons

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{x^2-2x+1}{x-1}. \end{array}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\star$; de plus on constate que $f(x) = x - 1$ pour tout x de $\mathbb{R}^\star$, ainsi f tend vers -1 en zéro. Donc f est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier et son prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier est simplement la fonction

$$\begin{array}{rcccl} \tilde{f} & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x - 1. \end{array}$$

Exemple 4.29. — La fonction

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sin(\frac{1}{x}) \end{array}$$

n'admet pas de prolongement par continuité en à $\mathbb{R}$ tout entier, car elle n'a pas de limite en 0. En revanche,

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \end{array}$$

admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier, car elle tend vers zéro en zéro (c'est le produit de f, qui est bornée, et de la fonction $x \mapsto x$ qui tend vers zéro en zéro).

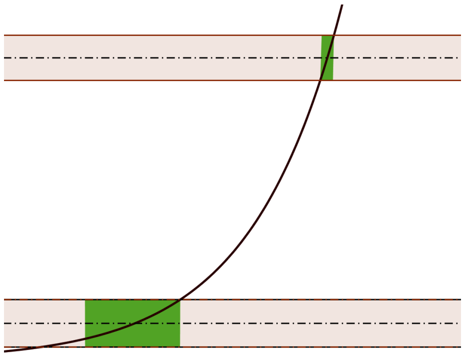
6. Continuité uniforme

6.1. Motivation. — Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $\mathcal{D}$.

Fixons pour toute la discussion à venir un nombre $\varepsilon > 0$. Grâce à la définition de la continuité, on sait que :

Pour chaque x_0 de $\mathcal{D}$, il existe un $\delta > 0$ vérifiant : si $u \in \mathcal{D}$ et $|u - x_0| < \delta$, alors $|f(u) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Nous avons déjà eu l'occasion de souligner page 54 que dans l'assertion ci-dessus, δ *dépend de* x_0 : selon le comportement de f au voisinage de x_0, le critère pour que u soit « assez proche de x_0 pour qu'on ait $|f(u) - f(x_0)| < \varepsilon$ » est plus ou moins restrictif.



Sur cet exemple, on semble voir que cette dépendance en x_0 est liée au fait que les variations de f peuvent être plus ou moins brusques selon les endroits : à ε donné, pour que la condition $|u - x_0| < \delta$ implique $|f(u) - f(x_0)| < \varepsilon$, il faut que δ soit très petit lorsque x_0 est « sur la droite de la figure », là où les variations de f sont brusques, tandis que δ peut être choisi de façon moins restrictive lorsque x_0 est situé en un lieu où les variations de f sont « plus douces ».

Cette dépendance est une source importante de difficultés techniques : par exemple, elle est largement responsable du fait que l'exemple page 55 soit plutôt délicat alors qu'il y est question d'une fonction très simple.

Le terme de *continuité uniforme* désigne la situation où, pour un $\varepsilon > 0$ fixé, on peut choisir « le même δ pour tous les x_0 ». Le choix de δ peut alors être « uniforme », au sens où il ne dépend pas de x_0. [(3)]

6.2. Définition et exemples. —

Définition 4.30 – Continuité uniforme

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est uniformément continue sur $\mathcal{D}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Remarque 4.31. —
- La continuité uniforme n'a de sens que *sur un domaine*, pas *en un point* : contrairement à la continuité uniforme, dire qu'une fonction serait « uniformément continue en x_0 » n'a pas de sens.
- Si f est uniformément continue sur $\mathcal{D}$ alors elle est continue sur $\mathcal{D}$; en revanche il existe des fonctions qui sont continues sans l'être uniformément.

3. On peut donc s'attendre à ce que l'étude de la continuité uniforme soit particulièrement technique : la notion ne diffère de la continuité que par un échange de quantificateurs (« $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x_0 \in \mathcal{D}$, $\exists \delta > 0$ » est remplacé par « $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x_0 \in \mathcal{D}$, $\exists \delta > 0$ »). Cela dit, nous avons bien l'habitude du fait qu'un échange de quantificateurs change la signification d'une affirmation et en change la portée lorsqu'elle est vraie : nous faisons tous la différence entre les assertions « tout électeur a voté pour un(e) candidat(e) » et « il existe un(e) candidat(e) pour qui tout électeur a voté »...

***Exemple 4.32* (Un exemple de fonction qui est continue, mais pas uniformément continue.)**
Considérons la fonction

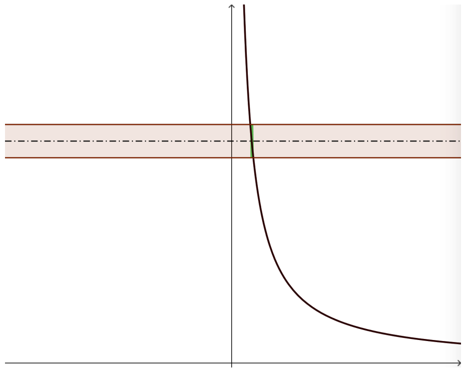
$$f : \left]0,1\right[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Nous savons bien sûr que f est continue sur $]0,1[$. Nous devons vérifier qu'elle n'est pas uniformément continue, donc vérifier l'assertion suivante :

$$\exists\varepsilon > 0, \quad \forall\delta > 0, \quad \exists(x,y) \in]0,1[^2, \quad \left(|x-y| < \delta \quad \text{mais} \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \geq \varepsilon\right). \qquad (\star)$$

En français et avec un peu de paraphrase :

On peut trouver un $\varepsilon > 0$ ayant la propriété suivante :
même pour δ arbitrairement petit,
il est possible de trouver deux points x et y
dont la distance est $< \delta$, mais tels que l'écart $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ dépasse ε.



Si ε est fixé, on constate que même avec x et y très proches l'un de l'autre, l'écart entre $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ peut tout à fait dépasser ε, à condition que x et y soient tous les deux situés « très près de zéro, là où la pente du graphe de f tend vers l'infini ». Il semble bien que le fait que ε soit grand ou petit n'ait pas d'importance et que cela soit vrai quelle que soit la valeur de ε…

Choisissons $\varepsilon = 1$.
Soit $\delta > 0$ quelconque fixé.

Nous cherchons x et y tels que $|x-y|$ soit $< \delta$, mais tels que l'écart $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ dépasse ε.
Or $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{xy}$
donc si on choisit x et y vérifiant $|x-y| = \frac{\delta}{2}$ mais tels que xy soit $\leq \frac{\delta}{2}$, nous aurons gagné.
Le plus simple est de choisir x et y voisins l'un de l'autre et tous deux voisins de $\sqrt{\frac{\delta}{2}}$, mais ce n'est possible que si $\sqrt{\frac{\delta}{2}}$ est inférieur à 1…

- *Dans le cas $\delta < 2$,* choisissons $x = \sqrt{\frac{\delta}{2}}$ et $y = \sqrt{\frac{\delta}{2}} - \frac{\delta}{2}$. On a bien $x \in]0,1[$ et $y \in]0,1[$.

  De plus : $|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$, mais $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{xy} = \frac{\delta/2}{\delta/2 - \frac{\delta\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{1-\sqrt{\frac{\delta}{2}}}$, si bien que $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \geq 1$.
- *Dans le cas $\delta \geq 2$,* choisissons $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{4}$, alors on a bien $|x-y| < \delta$ et $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = 2 > \varepsilon$.

6.2.1. *Fonctions lipschitziennes.* — Les exemples précédents semblent indiquer qu'une fonction dont les variations peuvent être arbitrairement brusques n'est en général pas uniformément continue ; inversement, au moins sur des exemples simples, on peut s'attendre à ce qu'une fonction dont les variations ne peuvent dépasser un certain niveau de « brusquerie » soit uniformément continue.

Le cas le plus simple de fonction dont « les variations sont bornées » est le suivant :

Définition 4.33 – Fonction lipschitzienne

Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$.
Si K est un nombre strictement positif, on dit que f est K-lipschitzienne lorsque :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|.$$

On dit qu'une fonction est *lipschitzienne* lorsqu'il existe $K > 0$ tel que f soit K-lipschitzienne.

Proposition 4.34 – Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues

Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne, alors f est uniformément continue sur $\mathcal{D}$.

Démonstration. — Soient $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne ; soit $K > 0$ tel que f soit K-lipschitzienne. Vérifions que f est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $\delta = \varepsilon/K$. Alors pour tous x, y de $\mathcal{D}$,
si $|x-y| < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y| < K\delta$, or $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, donc $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. □

6.3. Théorème de Heine. —

Théorème 4.35 – Théorème de Heine

Si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction continue sur le segment $[a,b]$, alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Démonstration. — Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour montrer qu'elle est uniformément continue, raisonnons par l'absude : supposons que f ne soit pas uniformément continue.

En niant la définition, on sait qu'il existe un $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$\forall \delta > 0,\ \exists (x,y) \in \mathcal{D}^2,\ |x-y| < \delta \text{ mais } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Fixons un tel ε et pour chaque n de $\mathbb{N}$, appliquons l'assertion $(\star)$ avec $\delta = \frac{1}{n+1}$: on obtient l'existence de deux éléments x_n et y_n de $[a,b]$ vérifiant :

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1}, \text{ mais } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \qquad (\star)$$

Si les suites (x_n) et (y_n) convergeaient, cette situation serait intenable :
elles devraient converger vers la même limite, disons ℓ, et d'après la caractérisation séquentielle les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ convergeraient toutes les deux vers $f(\ell)$.
Mais dans ce cas la distance entre $f(x_n)$ et $f(y_n)$ devrait tendre vers zéro, elle ne pourrait pas rester constamment $\geq \varepsilon$...
Bien sûr les suites (x_n) et (y_n) ne convergent pas forcément, mais il existe un substitut à base de suites extraites.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, car elle est à valeurs dans le segment $[a,b]$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extraction φ telle que $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite ; comme $a \leq x_n \leq b$ pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ell \in [a,b]$.

La suite $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro grâce à $(\star)$, donc $(x_{\varphi(k)} - y_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ aussi ; ainsi $(y_{\varphi(k)})_{n\geq 1}$ converge aussi vers ℓ. Grâce à la continuité de f en ℓ, on en déduit que les suites $\big(f(x_{\varphi(k)})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\big(f(x_{\varphi(k)})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers $f(\ell)$.

Mais pour tout k de $\mathbb{N}$, on a $\left|f(x_{\varphi(k)}) - f(y_{\varphi(k)})\right| \geq \varepsilon$; en passant à la limite quand k tend vers $+\infty$ on obtient $0 \geq \varepsilon$.

C'est absurde. □

***Exercice 4.1* (Pour travailler la démonstration).** — Pourquoi la démonstration ne permet-elle pas de montrer que si f est continue sur $]a,b[$, alors elle y est uniformément continue ? (ce résultat est visiblement faux, vu l'exemple de $x \mapsto \frac{1}{x}$ continue sur $]0,1[$ mais pas uniformément continue).

***Exemple 4.36* (Exemples d'utilisation du théorème).** —

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$.
- Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction
$$\begin{array}{ccc} [\varepsilon,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$
est uniformément continue ; cependant nous avons déjà vu que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1[$.