Université Paris-Dauphine
Département MIDO, première année de licence
Année universitaire 2018/2019

Analyse 1

Exercices 2018/2019

Alexandre Afgoustidis

alexandre.afgoustidis@dauphine.fr

Exercices du chapitre 1

Échauffement avec des quantificateurs

Exercice 1

1. Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes, puis dire (en justifiant) si chaque assertion est vraie ou fausse.
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x+y > 0$;
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x+y > 0$;
   (c) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x+y > 0$;
   (d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$.

   Dans tous les cas, écrire leur négation en termes de quantificateurs.
2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions
   (a) « f est la fonction constante de valeur 1 » ;
   (b) « f n'est pas la fonction constante de valeur 1 » ;
   (c) « f est une fonction constante » ;
   (d) « f n'est pas une fonction constante ».

Exercice 2

1. Soient x, y deux réels. Montrer l'équivalence : $\quad x = y \iff (\forall \varepsilon > 0,\ |x-y| < \varepsilon)$.
   (nous utiliserons souvent ce résultat dans la suite du cours)
2. Soient x, y deux réels. Montrer l'équivalence : $\quad x \leq y \iff (\forall \varepsilon > 0,\ x < y+\varepsilon)$.
3. Soient x, y deux réels. On suppose : $\forall n \in \mathbb{N},\ x \leq y < x+\frac{1}{n}$. Montrer que $x = y$.

Exercice 3

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant soigneusement votre réponse.

1. La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.
2. La somme de deux nombres irrationnels positifs est irrationnelle.
3. La racine carrée d'un nombre irrationnel positif est irrationnelle.

Exercice 4 $(\star)$

Soit n un entier naturel. Montrer qu'il y a équivalence entre

(a) $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$

(b) n est un carré parfait (c'est-à-dire : il existe un entier k de $\mathbb{N}$ tel que $n = k^2$).

Parties majorées, minorées, borne supérieure et inférieure : premières manipulations

Exercice 5 Vrai ou faux ? Justifier vos réponses.

1. (a) $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) + x > 0\}$ est borné.
   (b) $\{\cos(x) + x,\ x \in \mathbb{R}^+\}$ est minoré.
   (c) $\{\cos(x) + x,\ x \in \mathbb{R}^+\}$ est majoré.
2. (a) $\mathbb{Q} \cap [-7, 4[$ admet un plus petit élément.
   (b) $\mathbb{Q} \cap [-7, 4[$ admet un plus grand élément.
   (c) $\mathbb{R}^*_-$ admet un plus grand élément.
3. (a) $\left\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + 9 > n\right\}$ admet un plus petit élément.
   (b) $\left\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + 9 < n\right\}$ admet un plus petit élément.
   (c) $\left\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + 9 > n\right\}$ admet un plus grand élément.

Exercice 6

1. Vérifier que $\mathbb{R}^*_-$ admet une borne supérieure et que : $\sup(\mathbb{R}^*_-) = 0$.
2. Vérifier que $\mathbb{R}^*_-$ n'a pas de borne inférieure.
3. L'ensemble $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [2n, 2n+1[$ admet-il une borne supérieure ? inférieure ? Si oui, que valent-elles ?
4. Mêmes questions pour les ensembles $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} [2n, 2n+1[$ et $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}[$.

Exercice 7
Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. On définit

$$-A = \{-a,\ a \in A\}.$$

Donnez des conditions nécessaires et suffisantes pour que $-A$ soit majoré, minoré, borné.
Dans le cas où elles existent, que valent $\sup(-A)$ et $\inf(-A)$?

Exercice 7 bis
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe des réels a, b vérifiant :

$$\begin{cases} \text{(i)} & b > a > 0 \\ \text{(ii)} & A \subset [a, b]. \end{cases}$$

On considère la partie $B = \left\{\frac{1}{x},\ x \in A\right\}$.

1. Montrer que B est bornée.
2. Exprimer $\sup(B)$ et $\inf(B)$ en fonction de $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

Exercice 8
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$; notons $A^c = \mathbb{R} - A$ son complémentaire dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si A^c admet une borne supérieure, alors $\sup(A^c) = \min\{M \in \mathbb{R},\ ]M, +\infty[\subset A\}$.
2. Montrer qu'il est impossible que A et A^c soient tous les deux majorés.

Exercice 9 *Cet exercice est long !*
Pour chacun des ensembles

- $A = [0,1[\cup\{2\}$,
- $B = \{e^n;\ n \in \mathbb{N}\}$,
- $C = \{x^2+3x+1;\ x \in]0,1[\}$,
- $D = \{\frac{1}{n}+(-1)^n;\ n \in \mathbb{N}^*\}$,
- $E = \{x \in \mathbb{R};\ -2 < x+(2x)^{-1} \leq 2\}$,

(a) essayer de s'en faire une idée par un dessin,

(b) deviner s'il est majoré, minoré, borné,
s'il a une borne supérieure, une borne inférieure, un plus grand élément, un plus petit élément,
donner les valeurs de ces quantités lorsqu'elles existent.

(c) Prouver vos affirmations.

Exercice 10

1. Soit $A = \left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m},\ (m,n) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star\right\}$.
   (a) Montrer que A admet une borne supérieure et une borne inférieure.
   (b) Déterminer $\sup(A)$ et $\inf(A)$.
2. Mêmes questions pour $B = \left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{m},\ (m,n) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star\right\}$.

Exercice 11
Soit $A = \{0,1\ ;\ 0,11;0.101\ ;\ 0.1001\ ;\ 0,10001\ ;...\}$. Déterminer $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

Exercice 12
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall a \in A, \forall b \in B,\ a \leq b.$$

1. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et montrer l'inégalité : $\sup(A) \leq \inf(B)$.
2. Montrer l'équivalence : $\sup(A) = \inf(B) \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \exists b \in B,\ b-a \leq \varepsilon$.
   On dit dans ce cas que A et B sont adjacentes.
3. Donner un exemple de parties adjacentes.

Exercice 13
Soit n un élément de $\mathbb{N}^\star$. On considère $A_n = \left\{k+\frac{n}{k},\ k \in \mathbb{N}^\star\right\}$.

1. Montrer que A_n admet une borne inférieure, mais pas de borne supérieure.
2. Notons $B_n = \left\{k+\frac{n}{k},\ k = 1,..,n\right\}$. Montrer qu'on a $\inf(A_n) = \inf(B_n)$.
3. Montrer l'inégalité $\inf(A_n) \geq 2\sqrt{n}$. À quelle condition y a-t-il égalité ?

Intervalles

Exercice 14

1. Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$. Montrer l'égalité

$$[a,b] = \{ \ (1-t)a + tb \ , \ t \in [0,1]\}.$$

2. Considérons l'ensemble

$$I = \{ \ x - y \ , \ x \in [-1,4], \ y \in [-3,-1]\}.$$

Montrer qu'il existe deux réels a et b vérifiant : $I = [a,b]$. (*On pourra commencer par deviner ce que valent a et b.)*

Exercice 15

1. Montrer que la réunion de deux intervalles n'est pas un intervalle en général.
2. Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle (éventuellement vide).

Exercice 16 $(\star)$

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que I est un intervalle ouvert si et seulement si

$$\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I.$$

2. Montrer que l'intersection de deux intervalles ouverts est un intervalle ouvert.

Partie entière

Exercice 17

1. Soit $\varepsilon > 0$. Quels sont les entiers n vérifiant : $\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon$?
2. Soit $A > 0$. Quels sont les entiers n vérifiant : $\sqrt{n^2-n} > A$?

Exercice 17 bis

1. Soit $\varepsilon > 0$. Quels sont les entiers n de $\mathbb{N}^\star$ vérifiant : $\frac{1}{\ln(n)} < \varepsilon$?
2. Soit $A > 0$. Quels sont les entiers n vérifiant : $3^n > A$?

Exercice 18

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $E(x+1) = E(x) + 1$.
2. Montrer que pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a : $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.

Exercice 18 bis

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $E(2x) = E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right)$.
2. Calculer $E\left(\sqrt{n^2+n+1}\right)$ pour tout entier naturel n.

3. $(\star)$ Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

Exercice 19

Soit n un entier naturel non nul.

Montrer que le nombre de chiffres de l'écriture de n en base 10 est $E(\log_{10}(n)) + 1$.

Exercice 20

1. Soit n un élément de $\mathbb{N}^\star$. En utilisant la formule du binôme, montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier impair.
2. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, l'entier $E\left((2+\sqrt{3})^n\right)$ est impair.

Exercice 21

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x) + E(-x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$
2. $(\star)$ En déduire que si p, q sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors

$$\sum_{k=1}^{q-1} E\left(k\frac{p}{q}\right) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Indication : on pourra faire le changement de variable $k' = q - k$ dans la somme.

Autour de la valeur absolue

Exercice 22 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a)	$\lvert x+3\rvert = 5$,	(b)	$\lvert x+3\rvert \leq 5$,	(c)	$\lvert x+2\rvert > 7$,
(d)	$\lvert 2x-4\rvert \leq \lvert x+2\rvert$,	(e)	$\lvert x+12\rvert = \lvert x^2-8\rvert$,	(f)	$\lvert x+12\rvert \leq \lvert x^2-8\rvert$.

Exercice 23

Montrer que les ensembles suivants sont bornés :

- $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 12\right\}$;
- $\left\{x^7 - 8x^3 - 5,\ x \in]-2,2[\right\}$;
- $\left\{\left(\sin(x) + \frac{3}{x^2+4}\right)^5,\ x \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 24

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On définit

$$B = \left\{\lvert x-y\rvert,\ (x,y) \in A^2\right\}.$$

1. Montrer que B admet une borne supérieure et une borne inférieure.

2. Montrer que B admet un plus petit élément.
3. Montrer l'inégalité : $\sup(B) \leq (\sup(A) - \inf(A))$.
4. Montrer l'assertion suivante : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists (x,y) \in A^2,\ |x-y| > \sup(A) - \sup(B) - 2\varepsilon$.
5. En déduire l'égalité $\sup(B) = (\sup(A) - \inf(A))$.

Parties denses de $\mathbb{R}$

Exercice 25

Soit U l'ensemble des nombres rationnels ayant, dans leur écriture sous forme de fraction irréductible, un dénominateur impair. L'ensemble U est-il dense dans $\mathbb{R}$?

Exercice 26
Soit U une partie de $\mathbb{R}$. On suppose que U est dense dans $\mathbb{R}$.
Montrer que si a et b sont deux réels et $a < b$, alors l'ensemble $U \cap]a,b[$ est infini.

Exercice 27 $(\star)$
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{(i) } \forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a,b) \in A^2,\ a < x < b \\ \text{(ii) } \forall (a,b) \in A^2,\ \frac{a+b}{2} \in A. \end{cases}$$

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$. Donner un exemple de sous-ensemble non trivial de $\mathbb{R}$ vérifiant les points (i) et (ii).

Exercice 28 $(\star)$
On considère l'ensemble

$$A = \{q \in \mathbb{Q};\ q^2 < 2\}.$$

Quelle est sa borne supérieure dans $\mathbb{R}$?
C'est un exemple de partie <u>de $\mathbb{Q}$</u> qui a une borne supérieure <u>dans $\mathbb{R}$</u>, mais n'a pas de borne supérieure <u>dans $\mathbb{Q}$</u>.

Deux problèmes

Exercice 29 Soient $A = \{x \in \mathbb{R}; \exists p,q \in \mathbb{Z}, x = p + q\sqrt{2}\}$ et $u = \sqrt{2} - 1$.

1. Montrer que pour tout z de $\mathbb{Z}$ et tout x de A, on a : $zx \in A$.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, u^n appartient à A.
3. Montrer l'inégalité : $0 < u < 1/2$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u^n < 1/n$.
4. Soient a et b des réels vérifiant $a < b$. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que : $0 < u^n < b - a$.
   En déduire qu'il existe un élément de A appartenant à l'intervalle $]a,b[$.

5. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe des entiers $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$u^n = p_n + q_n\sqrt{2}, \quad \text{avec } p_n q_n < 0.$$

   En déduire que si a et b sont des réels vérifiant $a < b$, alors il existe une infinité d'irrationnels dans l'intervalle $]a, b[$.

Exercice 30

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) f n'est pas la fonction nulle

(ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

(iii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy) = f(x)f(y)$.

1. (a) Calculer $f(x)$ pour $x = 0$, pour $x = 1$, pour $x \in \mathbb{N}$, pour $x \in \mathbb{Z}$, pour $x \in \mathbb{Q}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe deux nombres α et β, avec $\alpha < \beta$, vérifiant : $\begin{cases} f(\alpha) = \alpha \text{ et } f(\beta) = \beta \\ x \in]\alpha, \beta[\\ \beta - \alpha < \varepsilon \end{cases}$.

2. (a) Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \geq 0$, alors $f(x) \geq 0$.

   (b) En déduire que f est croissante.

   (c) $(\star)$ Montrer l'égalité : $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
   (on peut raisonner par l'absurde ; si x est un réel vérifiant $f(x) \neq x$, on pourra commencer par appliquer 1(b) avec $\varepsilon = \frac{|f(x)-x|}{2}$)

Exercices du chapitre 2

Manipulations de la définition

Exercice 1 *Limites classiques*

1. Soit α un réel strictement positif. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers zéro.
2. Soit a un réel appartenant à $]-1,1[$. Montrer que la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro.
3. Soit a un réel appartenant à $]-1,1[$. Rappeler la formule donnant, pour chaque n de $\mathbb{N}^\star$ la valeur de $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a^k$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, en précisant sa limite.

Exercice 2
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. (a) Écrire avec des quantificateurs ce que signifie l'expression : « u est convergente ».
   (b) Écrire avec des quantificateurs ce que signifie l'expression : « u est divergente ».
2. On suppose qu'il existe un réel α et un nombre $\varepsilon > 0$ vérifiant : $|u_n - \alpha| \geq \varepsilon$ à partir d'un certain rang.
   Montrer qu'il est impossible que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 3 *Versions équivalentes de la définition*

1. Soient ℓ un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
   Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$
   (b) $\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \quad \exists \tilde{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \tilde{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \tilde{\varepsilon}$
   « *Dans la définition de la limite, on peut indifféremment mettre $|u_n - \ell| < \varepsilon$ ou $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, ça ne change pas la notion* »
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
   Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n > A$
   (b) $\forall \tilde{A} \in \mathbb{R}, \quad \exists \tilde{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \tilde{N}, \quad u_n > \tilde{A}$

Exercice 4
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Notons ℓ sa limite.
Considérons un réel a vérifiant : $\ell < a$.
Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a : $u_n < a$.

Exercice 5
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Montrer que si u est convergente, alors à partir d'un certain rang, on a : $|u_{n+1} - u_n| < 1$.
2. On suppose maintenant que u est à valeurs entières, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{Z}$.
   Montrer que si u est convergente, alors u est stationnaire.

Exercice 6

1. Soit U une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) La partie U est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout réel x et pour tout $\varepsilon > 0$, l'intersection $U \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est non vide.
   (c) Pour tout réel x et pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, l'intersection $U \cap \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[$ est non vide.
   (d) Pour tout réel x, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes appartiennent à U et qui converge vers x.
2. ($\star$) Montrer que si x est un nombre réel, alors il existe une suite *croissante* de nombres rationnels qui tend vers x.

Limites infinies, manipulations de la définition

Exercice 7 *Limites classiques*

1. Soit α un réel strictement positif. Montrer que la suite $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. Soit a un réel vérifiant : $\alpha > 1$. Montrer que la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 8
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$.
Montrer (à partir de la définition) que la suite $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $+\infty$.

Opérations, encadrements, croissances comparées : exercices concrets

Exercice 9 Soit x un nombre réel. On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{E(x) + E(2x) + \ldots + E(nx)}{n^2}.$$

Vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(On rappelle que pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, on a : $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.)

Exercice 10 On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$, on a : $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 11 On rappelle l'encadrement : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ (vu au chapitre zéro).
Étudier la convergence des suites :

(a) $\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$,

(b) $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$,

(c) $\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 12
Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles dont tous les termes appartiennent à $[0,1]$. On suppose : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Opérations, encadrements, croissances comparées : exercices abstraits

Exercice 13 *Suites tendant vers zéro « plus vite qu'une suite géométrique ».*
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui ne s'annule pas.

1. Dans cette question on suppose qu'il existe $\alpha \in [0,1[$ vérifiant : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \alpha$ à partir d'un certain rang.
   Montrer que u converge vers zéro.
2. Dans cette question on suppose qu'il existe $\ell \in]-1,1[$ vérifiant : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$. Montrer que u converge vers zéro.
3. *Applications.*
   (a) Soit a un réel. Étudier la convergence de $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Soit a un réel et p un entier naturel non nul. Étudier la convergence de $\left(\frac{a^n}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier la convergence de $\left(\frac{n^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13 bis Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes sont strictement positifs.

1. Dans cette question on suppose qu'il existe $\alpha > 1$ vérifiant : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > \alpha$ à partir d'un certain rang.
   Montrer que u tend vers $+\infty$.
2. On suppose que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel strictement supérieur à 1. Montrer que u tend vers $+\infty$.

Exercice 14 *Caractérisation de la borne supérieure à l'aide de limites de suites.*
Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et M un nombre réel. Vérifier que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) M est la borne supérieure de A ;

(b) $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A\,; \\ \text{il existe une suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ qui converge vers } M \text{ et dont tous les termes appartiennent à } A. \end{cases}$

Exercice 14 bis

1. Énoncer et démontrer une caractérisation analogue de la borne inférieure à l'aide de limites de suites.
2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
   Montrer que A est non-majorée si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers $+\infty$.

Exercice 15
Dans cet exercice, on propose une preuve du théorème des croissances comparées.

1. Dans cette question on montre que les suites $u = \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $v = \left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent vers zéro.
   (a) Vérifier l'inégalité suivante : $\forall t > 0,\ \ln(t) \leq t - 1$.
   (b) En déduire l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad 0 \leq \frac{\ln(n)}{n} \leq 2\frac{\sqrt{n}-1}{n}$, puis vérifier que u converge vers zéro.
   (c) En utilisant l'inégalité (a), vérifier que v converge vers zéro.
2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $\left(\frac{e^{an}}{n^b}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers $+\infty$.
3. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $\left(\frac{n^b}{\ln(n)^c}\right)_{n\geq 2}$ tend vers $+\infty$.
4. Soient a, b et c des réels strictement positifs. Montrer que $\left(\frac{e^{an}}{n^b\ln(n)^c}\right)_{n\geq 2}$ tend vers $+\infty$.

Suites monotones, suites adjacentes

Exercice 16 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante qui converge vers zéro. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.

Exercice 17 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante non majorée. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 18 On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, sans trouver sa limite.
2. Montrer qu'en fait, $u_n = \frac{n+1}{2n}$ pour tout $n \geq 1$. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 19
Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments emboîtés.
On suppose que $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro.
Montrer que l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton.

Exercice 20 Soient x et y deux réels strictement positifs avec $x < y$.
On définit $a_0 = x$, $b_0 = y$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.
Vérifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
Leur limite, appelée moyenne arithmético-géométrique de x et y, ne peut s'exprimer en fonction de x et y avec les fonctions usuelles.

Exercice 21 *Dans cet exercice, on montre que le nombre e est irrationnel.*

Pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, on note
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n\cdot(n!)}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Dans cette question on montre que leur limite commune est un nombre irrationnel. Notons ℓ cette limite. On suppose qu'il existe des entiers p et q ($p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^\star$) vérifiant : $\ell = \frac{p}{q}$.
   (a) On définit : $x = (q!)\cdot(\ell - u_q)$. Vérifier que x est un entier.
   (b) En encadrant x à l'aide des positions relatives de u_q, ℓ et v_q, vérifier que x appartient à $]0,1[$. Conclure.

3. Dans cette question on montre que leur limite commune est le nombre e. Pour chaque n de $\mathbb{N}^\star$, on note $w_n = (1+\frac{1}{n})^n$.
   (a) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}^\star$ et tout k de $\{0,..,n\}$, $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$ est compris entre $\frac{1}{k!}$ et $\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k(k-1)}{n}\right)$.
   (b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, on a $\left(1-\frac{1}{n}\right)u_n \leq w_n \leq u_n$. Conclure avec l'exercice 12.

Notion de suite extraite

Exercice 22 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$. Montrer que toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 23 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Montrer que si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell\in\mathbb{R}$, alors (u_n) converge vers ℓ.
2. Montrer que si les trois suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 alors
   - on a nécessairement $\ell_1=\ell_2=\ell_3$;
   - la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette limite commune.
3. Les deux conclusions de la question 2 sont-elles toujours vraies si les trois sous-suites (u_{3n}), (u_{3n+1}) et (u_{3n+2}) convergent ?

Exercice 24 On considère la suite u définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = \sqrt{n}-E(\sqrt{n})$.

1. Calculer u_{n^2+n} pour tout n de $\mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_{n^2+n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. En déduire que la suite u est divergente.

Exercice 25 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit ℓ un nombre réel.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ.
(b) Pour tout $\varepsilon>0$, l'ensemble $\{n\in\mathbb{N} \quad / \quad |u_n-\ell|<\varepsilon\}$ est infini.

Exercice 25 bis Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit ℓ un nombre réel.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) La suite (u_n) ne converge pas vers ℓ,
(b) Il existe un nombre $\varepsilon>0$ et une extraction $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ vérifiant : $\quad \forall k\in\mathbb{N}, \quad \left|u_{\varphi(k)}-\ell\right|\geq\varepsilon$.

Exercice 26

1. Démontrer la formule de trigonométrie suivante : $\quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \quad \sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.
2. Démontrer que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente (on pourra considérer la quantité $\sin(n+2)+\sin(n)$).

Exercice 27 ($\star$) Soient u une suite réelle bornée et ℓ un nombre réel.
On suppose que toutes les suites extraites de u qui sont convergentes ont pour limite ℓ.
Montrer que u converge vers ℓ.
(On pourra supposer que u ne converge pas vers ℓ et construire, en niant la convergence, une sous-suite de u qui reste « loin » de ℓ).

Exercices de synthèse

Exercice 28 *Révisions*

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si la suite $(|u_n|)$ est majorée, la suite (u_n) est bornée.
2. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites divergentes, la suite somme $(u_n + v_n)$ est aussi divergente.
3. Si la suite $(|u_n|)$ est divergente, il en est de même de la suite (u_n).
4. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \leq v_n$, alors la convergence de (v_n) implique celle de (u_n).
5. La convergence d'au moins une suite extraite implique la convergence de la suite elle-même.
6. Toute suite positive décroissante est convergente de limite nulle.
7. Toute suite positive de limite nulle est décroissante à partir d'un certain rang.
8. Toute suite qui converge vers une limite $\ell > 0$ est strictement positive à partir d'un certain rang.
9. Si (u_n) converge vers 1/2, alors u_{n+1}/u_n tend vers 1/2.
10. Si u_{n+1}/u_n tend vers 1/2, alors (u_n) converge vers 1/2.

Exercice 29 *Suite de Fibonacci*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_1 = 1, u_2 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. Montrer l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n$.
3. Vérifier que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge et trouver sa limite.

Exercice 30 *Théorème de Cesàro*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et (v_n) la suite définie par : $v_0 = u_0$ et pour $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}.$$

Pour chaque n de $\mathbb{N}$, le nombre v_n est ainsi la moyenne des n premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Dans cette question, on suppose que (u_n) converge vers 0.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant : pour tout $n \geq N$,
   $$|v_n| < \left|\frac{\sum_{k=1}^{N} u_k}{n}\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$
   (b) Soit $\varepsilon > 0$ fixé et N un entier vérifiant la propriété de la question (a). Montrer qu'il existe un entier N' vérifiant :
   $$\forall n \geq N', \quad \left|\frac{\sum_{k=1}^{N} u_k}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
   (c) En déduire que (v_n) converge vers 0.
2. Soit ℓ un nombre réel. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.

Exercice 31 *Applications du théorème de Cesàro*

1. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\ldots+\frac{1}{n^2}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un nombre réel.
   (a) Montrer que si $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge aussi vers ℓ.
   (b) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge aussi vers ℓ.

Exercice 32 $(\star)$

1. Montrer
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=0.$$
Indication : à $\varepsilon>0$ fixé, couper la somme en deux en : $E(1/\varepsilon)$.
2. Etudier la convergence de
$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k},\ n\geq 1.$$
On ne cherchera pas à expliciter la limite.

Exercice 33 $(\star)$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On lui associe deux suites, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par :
$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad b_n=a_{n-1}-a_n\quad\text{et}\quad c_n=a_{n+1}+a_{n-1}-2a_n.$$
On suppose d'une part que $c_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, d'autre part que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

1. Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente. On note ℓ sa limite.
2. Montrer que $\ell=0$.
3. En déduire que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs et que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 34 *Une suite récurrente*

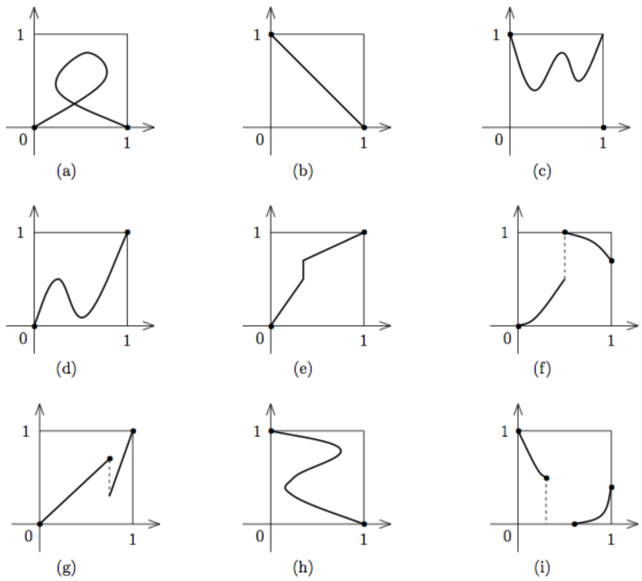
Soit α un nombre réel positif. On considère la suite définie par : $u_0=\alpha$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.

1. Montrer que u_n est bien défini pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. Soit x un nombre réel positif. Quel est le signe de $x-\sqrt{2+x}$?
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone ; on discutera selon que α est supérieur ou inférieur à 2.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

Exercices du chapitre 3

Vocabulaire sur les fonctions

Exercice 1 Déterminer si les dessins suivants correspondent aux graphes d'une fonction, d'une injection, d'une surjection de $[0,1]$ dans $[0,1]$.



Exercice 2 Pour chacune des expressions suivantes,

— déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ a un sens,

— déterminer l'ensemble $F = \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathscr{D},\ y = f(x)\}$,

— montrer que l'application $f : \mathscr{D} \to F$ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

$$f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}, \qquad f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1}, \qquad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exercice 3 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Définition de la limite, premières manipulations

Exercice 4 Dans cet exercice, on fixe un réel x_0 et une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

1. On suppose que f est à valeurs strictement positives.
   Vérifier, en utilisant uniquement la définition de la limite, que $e^{f(x)}$ tend vers 1 quand x tend vers x_0.
2. Même question si on ne suppose plus que f est à valeurs strictement positives.

Exercice 5

1. Soit a un réel avec $a > 1$. Vérifier, à l'aide de la définition de la limite, que la fonction $x \mapsto a^x$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
2. Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite finie en $+\infty$, notée ℓ, et que : $\ell > 0$.
   Montrer, en utilisant uniquement la définition de la limite, que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 6

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f tend vers $+\infty$ en zéro.
   Vérifier à l'aide de la définition de la limite que :
   — l'ensemble $\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(e^{-x}) \neq 0\}$ n'est pas majoré ;
   — si on définit $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{f(e^{-x})}$ pour tout x de $\mathscr{D}$, alors g tend vers zéro en $+\infty$.
2. Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ℓ un nombre réel. On suppose que f tend vers ℓ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   On définit $g : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ g(x) = f(\frac{1}{x})$.
   Vérifier à l'aide de la définition de la limite que la fonction g tend vers zéro en zéro.

Caractérisation séquentielle, premières manipulations

Exercice 7 La fonction $x \mapsto E(x) + E(-x)$ a-t-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 8 Soient $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, x_0 un point de l'adhérence $\mathbf{Adh}(\mathscr{D})$.
Montrer que si f est une fonction bornée et g une fonction qui tend vers zéro en x_0, alors la fonction fg tend vers zéro en x_0.

Exercice 9 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que les deux conditions suivantes sont vérifiées :
— La fonction f est périodique.
— La fonction f admet une limite (finie) en $+\infty$.
Montrer que f est constante.

Application des théorèmes généraux

Exercice 10

1. Déterminer, sous réserve d'existence, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.
2. Soient a et b des réels positifs. Déterminer, sous réserve d'existence, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^a}-\sqrt{1-x^b}}{x^b}$.
3. Déterminer, sous réserve d'existence, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$.

Exercice 11 Soient a et b des réels strictement positifs. Déterminer, sous réserve d'existence,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a}\cdot E\left(\frac{b}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}\cdot E\left(\frac{x}{a}\right)$$

Exercice 12

1. Soient a et b des réels. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k}.$$

2. Soit α un nombre réel. Discuter l'existence et la valeur éventuelle de

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}.$$

Exercice 13
Discuter l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}, \qquad \lim_{x\to 2} \frac{e^x-e^2}{x^2+x-6}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)}.$$

Exercice 14 Étudier, selon la valeur du réel α, l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x}, \quad \lim_{x\to\alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}.$$

Autour des fonctions croissantes majorées

Exercice 15 *Le résultat est à retenir.*
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est croissante et majorée, alors f admet une limite (finie) en $+\infty$.

Exercice 16 Soit a un nombre réel. Dans cet exercice,

— on considère une fonction $f : [a;+\infty[\to\mathbb{R}$; on suppose f croissante majorée et on note b la limite de f en $+\infty$;
— on définit $g :]a;+\infty[\to\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pour tout $x > a$.

Montrer que si g est croissante, alors f est constante.

Exercice 17
Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$; soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
Dans tout l'exercice, on suppose que f est croissante.

1. Soit x_0 un élément de $[a,b]$. Montrer que f admet des limites à gauche et à droite en x_0.
   Dans la suite de l'exercice, on note $f_-(x_0)$ la limite à gauche de f en x_0 et $f_+(x_0)$ la limite à droite de f en x_0. .
2. Montrer que pour tout x_0 de $[a,b]$, on a $f_-(x_0) \le f(x_0) \le f_+(x_0)$.
3. Montrer que les fonctions $x \mapsto f_+(x)$ et $x \mapsto f_-(x)$ sont croissantes.

4. ($\star$) Pour tout k de $\mathbb{N}^\star$, on note $D_k = \{x_0 \in [a,b] \quad / \quad f_+(x_0) - f(x_0) > \frac{1}{k}\}$.
   Montrer que l'ensemble D_k ne peut contenir qu'un nombre fini d'éléments.
5. On dit que f admet un saut à droite en x_0 si $f(x_0) < f_+(x_0)$.
   Montrer que l'ensemble des sauts à droite d'une fonction croissante est au plus dénombrable.
   On pourra utiliser la proposition 5.2.10 dans le polycopié du cours d'algèbre du premier semestre 2017/2018.

Exercices divers

Exercice 18

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ n'a pas de limite en zéro.
2. La fonction $x \mapsto E(x) + E\left(\frac{1}{1+x}\right)$ a-t-elle une limite en zéro ?
3. La fonction $x \mapsto \sin(\cos(x))$ a-t-elle une limite en $+\infty$?
4. Montrer que la fonction $x \mapsto E\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 19

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$.
   Montrer que f admet une limite (finie) en 0.
2. Montrer que $\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers zéro quand x tend vers zéro.
3. Montrer que $\dfrac{x\sin x}{x^2+1} = 0$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^2 \sin x}{x^2+1}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 20

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels x pour lesquels l'expression $\exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$ a un sens.
   Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right). \end{array}$$

2. La fonction f admet-elle des limites en 0, 1, $+\infty$? Si c'est le cas, préciser leurs valeurs. Si ce n'est pas le cas, préciser s'il y a toutefois des limites à droite et à gauche.
3. Montrer l'inclusion $f(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}$. Déterminer la fonction $f \circ f$.
4. Soit x un élément de $\mathscr{D}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$u_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)\ .$$

   Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la suite (u_n) soit convergente.

Exercice 21 ($\star$)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose réunies les deux conditions suivantes :
- la fonction f est à valeurs strictement positives,
- la fonction $x \mapsto f(x) + \frac{1}{f(x)}$ tend vers 2 en zéro.

Montrer que f tend vers 1 en zéro.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers zéro, on pourra établir que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, puis utiliser le résultat de l'exercice 27 du chapitre 2.

Exercices du chapitre 4

Continuité : définition et caractérisation séquentielle

Exercice 1 Pour chacune des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes, déterminer tous les points où f est continue et tous les points où f ne l'est pas, en justifiant les réponses.

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

(c) $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)^2 + \lfloor x \rfloor$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

(d) $f(x) = \begin{cases} x \cdot E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}.$

Exercice 2

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f vérifie la propriété suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que $f(x) = x \cdot f(1)$ pour tout x de $\mathbb{N}$, puis pour tout x de $\mathbb{Z}$, puis pour tout x de $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $f(x) = x \cdot f(1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x^2) = f(x)$.
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(\sqrt{x}) = f(x)$.
   b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on a $f(x^{1/2^n}) = f(x)$.
   c) Montrer que f est constante.
2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non constante, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x).$$

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 4

1. Soient f et g deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(f(0)-g(0))(f(1)-g(1)) \leq 0$.
   Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.
2. Montrer que l'équation $x^{12} = x^{11} + 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5 Pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, on note f_n la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n + 2x^2 + x - 1.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. Vérifier que f_n est strictement croissante et que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, \frac{1}{2}[$. On note x_n cette solution.
2. Montrer que pour tout x de $[0,1]$, on a $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante, puis qu'elle converge.
3. Vérifier que la suite $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers zéro. En déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 6 Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = f(1)$.

1. Vérifier qu'il existe un x de $[0, \frac{1}{2}]$ vérifiant $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$.
2. Soit n un entier naturel non nul. Vérifier qu'il existe deux éléments x_n et y_n de $[0,1]$ vérifiant : $x - y = \frac{1}{n}$ et $f(x_n) = f(y_n)$.

Exercice 7

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue ; montrer que si l'ensemble $f(I)$ est fini, alors f est constante.

Exercice 8

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive, croissante, telle que :

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \quad \text{avec } \ell < 1.$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,+\infty[$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Théorème des bornes atteintes

Exercice 9 Soient a et b deux réels avec $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que : $\forall x \in [a,b], \quad f(x) < g(x)$.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant : $\forall x \in [a,b],\ f(x) + \alpha \leq g(x)$.

Exercice 10 Existe-t-il

(a) Une fonction continue et surjective de $[0,1]$ dans $]0,1[$?

(b) Une fonction continue et surjective de $]0,1[$ dans $[0,1]$?

(c) ($\star$) Une fonction continue et surjective de $]0,1]$ dans $]0,1[$?

Exercice 11 Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que
   — f est continue et positive
   — $f(0) = 1$
   — f tend vers 0 en $+\infty$.
   Montrer que f admet un maximum.
2. Montrer que la conclusion reste vraie si on suppose seulement que f est continue, positive et tend vers 0 en $+\infty$.
3. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que la conclusion de la question précédente n'est plus vraie si on retire l'hypothèse de continuité.

Exercice 12 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 13
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non constante, qui vérifie $f(a) = f(b)$. On note $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.
Montrer que, pour tout y de $]m,M[$, il existe au moins deux éléments distincts de $[a,b]$ dont l'image par f est y.

Prolongement par continuité

Exercice 14 Dire si chacune des fonctions de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$ suivantes admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier.

1. f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f(x) = \sin(x)\sin(1/x)$.
2. g est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ g(x) = \cos(x)\cos(1/x)$.

Exercice 15
Trouver un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier des fonctions suivantes :

a) $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(x) = \frac{x^3+5x+6}{x^3+1}$.

b) Un entier $n \in \mathbb{N}$ est fixé et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est définie par : $\forall x \neq 0,\ f(x) = \frac{(1+x)^n-1}{x}$.

Continuité uniforme

Exercice 16 Soient $\mathscr{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$.
On souhaite démontrer la caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité :

« f est uniformément continue sur $\mathscr{D}$ »

$$\Updownarrow$$

« Pour toutes suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ à valeurs dans $\mathscr{D}$ vérifiant : $(x_n - y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, la suite $(f(x_n) - f(y_n))_n$ tend vers 0. »

1. Démontrer l'implication $\Downarrow$.
2. En raisonnant par contraposée, démontrer l'implication $\Uparrow$.
   Indication : on sera amené à dire quelque chose comme « pour chaque n, j'applique (...) avec (...) $= 1/n$ ».

Exercice 17
Pour chacune des fonctions f suivantes, dire (en justifiant) si f est uniformément continue sur le domaine donné.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0,1]$; (b) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$;

(c) $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$; (d) $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, (10^{80})!]$;

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$; (f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1,2]$;

(g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1,+\infty[$; (h) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ sur $]0,1]$.

On n'hésitera pas à s'appuyer sur la caractérisation séquentielle, notamment pour démontrer l'absence de continuité uniforme.

Exercice 18

1. Soient a et b deux réels positifs ou nuls et n un entier naturel. Montrer que si $a \geq b$ alors
$$a^n - b^n \geq (a-b)^n .$$
   Indication : commencer par écrire $a = (a-b)+b$.

Dans les trois questions suivantes, n est un entier supérieur ou égal à 2.

2. Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ on a l'inégalité
$$\left|y-x\right|^{\frac{1}{n}} \geq \left|y^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}\right| .$$
3. En déduire que la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
4. On rappelle l'égalité suivante, valable pour tous réels a, b et pour tout entier naturel non nul n :
$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} .$$
   Montrer en utilisant cette égalité que la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est $(1/n)$-lipschitzienne sur $[1,+\infty[$.
   Est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$?

Exercices de synthèse

Exercice 19 Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant votre réponse.

1. L'image d'un intervalle $[a,b]$ par une fonction continue est un intervalle $[c,d]$.
2. L'image d'un intervalle $]a,b[$ par une fonction continue est un intervalle $]c,d[$.
3. Si f est continue et ne s'annule pas sur $[a,b]$, alors $1/f$ est bornée sur $[a,b]$.
4. Si f est continue et bornée sur $[a,b[$, f atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure.
5. Si f est continue et bornée sur $[a,b[$, f atteint sa borne inférieure ou sa borne supérieure.

6. Tout polynôme à coefficients réels de degré pair a au moins une racine réelle.
7. Tout polynôme à coefficients réels de degré impair a au moins une racine réelle.
8. Si f vérifie : « pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $f(I)$ est un intervalle », alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ et $g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues, telles que

$$f \circ g = g \circ f.$$

On veut démontrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

1. On pose $h(x) = f(x) - x$. Montrer que h s'annule en au moins un point de $[0,1]$. On note ce point x_1.
2. En déduire que $g^n(x_1) = f(g^n(x_1))$, $\forall n \geq 1$ (g^n désigne la composée $g \circ g \circ \ldots \circ g$, où g figure n fois).
3. On pose $u_n = g^n(x_1)$. Vérifier que $f(u_n) = u_n$ et $g(u_n) = u_{n+1}$.
4. On suppose que la suite (u_n) est monotone. Montrer qu'elle a alors une limite ℓ. Que peut-on dire de $f(\ell)$ et $g(\ell)$?
5. $(*)$ On suppose que (u_n) n'est pas monotone. Montrer qu'il existe des réels $u, v \in [0,1]$ tels que $(f-g)(u)(f-g)(v) \leq 0$. Conclure.

Exercice 21 $(\star)$

a) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a,b[$, où a et b sont deux réels avec $a < b$. Montrer que si f est strictement croissante et continue sur l'intervalle $]a,b[$, alors on a $f(]a,b[) =]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[$.

b) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie et strictement monotone sur I. On suppose que $f(I)$ est un intervalle. Montrer que f est continue sur I.

c) Existe-t-il une bijection continue de $\mathbb{R}$ vers $[-1,1]$?

d) Existe-t-il une application strictement monotone et surjective de $\mathbb{R}$ vers $[-1,1]$?

Exercice 22
Soient a un réel strictement positif et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |f(x) - f(y)| \geq a|x-y|.$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que f ne peut pas être bornée.
3. En déduire que f est surjective.

Exercices du chapitre 5

Dérivabilité : autour de la définition et des opérations usuelles

Exercice 1 *Retour au chapitre zéro*
Dire quels sont les réels où les fonctions suivantes sont dérivables et y calculer leurs dérivées :

1. $x \to \cos(\sqrt{x})$	2. $x \to 2^{-x}$	3. $x \to \ln(\ln(\ln(x)))$
4. $x \to (1+x^{2/3})^{3/2}$	5. $x \to \sqrt{\sin(x^2)}$	6. $x \to \sin(2\cos(3x))$
7. $x \to \cos(\ln(x))$	8. $x \to 3^{3^x}$	9. $x \to \sin(\frac{x}{\cos(x)})$
10. $x \to \sqrt{x+e^x}$	11. $x \to \ln(x\sin(x))$	12. $x \to 2^{x\sin(x)}$

Exercice 2 Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, tous les points de dérivabilité.

- f_1 est définie par : $f_1(0) = 0$ et pour tout $x \neq 0$, $f_1(x) = x^2\cos(\frac{1}{x})$.
- f_2 est définie par : $f_2(0) = 0$ et pour tout $x \neq 0$, $f_2(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x})$.
- f_3 est définie par : $f_3(1) = 1$ et pour tout $x \neq 1$, $f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$.

Exercice 3 *Résultat important*
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$ vérifiant : $f'(x_0) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ vérifiant : $\forall\, u \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus\{x_0\}, \quad f(u) \neq f(x_0)$.
2. Si f' est de plus continue au point x_0, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f_{|]x_0-\delta,x_0+\delta[}$ soit injective.

Exercice 4 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que si f est paire, alors f' est impaire.
2. Vérifier que si f est périodique, alors f' est périodique.

Exercice 5 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ comportant au moins deux points et f une fonction définie et dérivable sur I. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des points de I où $|f|$ est dérivable.

1. Dans cette question, on suppose que $f(x_0) \neq 0$. Vérifier qu'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que : $\forall u \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$, $f(u) \neq 0$. En déduire que $|f|$ est dérivable en x_0.
2. Dans cette question, on suppose que $f(x_0) = 0$. Vérifier que la fonction $|f|$ est dérivable à droite et à gauche en x_0. En déduire que $|f|$ est dérivable en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = 0$.

Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Exercice 6 Montrer que la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_\star^+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(x+1)^{\frac{1}{3}} - \ln(x)^{\frac{1}{3}} \end{array}$$

admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.
Indication : On reconnaît dans $f(x)$ le taux de variation de $t \mapsto (ln(t))^{\frac{1}{3}}$ entre x et $x+1$...

— *commencer par fixer $x > 0$ et appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x, x+1]$;*
— *faire ensuite tendre x vers $+\infty$.*

Exercice 7 Soit P un polynôme à coefficients réels.
Montrer que si P est scindé à racines simples, alors le polynôme P' est aussi scindé à racines simples.

Exercice 8 *Règles de l'Hôpital.*
Soient a et b deux réels avec $a < b$. Dans cet exercice, on considère deux fonctions f et g de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, on suppose que f et g sont dérivables sur $[a,b]$ et que $\forall\, x \in]a,b[,\ g'(x) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
(*Appliquer le théorème de Rolle à $f - \lambda g$, où λ est un réel bien choisi*).

2. En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite finie ℓ quand x tend vers a, alors
$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \to \ell \quad \text{quand } x \to a^+.$$
C'est la *règle de l'Hôpital* (elle apparaît dans un ouvrage de G. F. Antoine, marquis de l'Hôpital, en 1696).

Exercice 9 *Application des règles de l'Hôpital.*
Cette règle permet d'étudier certaines limites de quotients en « remplaçant numérateur et dénominateur par leurs dérivées » : par exemple,

1. étudier l'existence d'une limite quand x tend vers 0^+ pour la quantité $\frac{e^x - x - 1}{\cos(x) - 1}$.
2. étudier l'existence d'une limite quand x tend vers 0^+ pour la quantité $\frac{\cos(2x) - 1}{x^3 + 5x^2}$.

On appliquera plusieurs fois de suite la règle de l'Hôpital jusqu'à ce que l'indétermination disparaisse.

Exercice 10 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ dérivable sur I.
Un *point fixe* de f est un point x de I vérifiant $f(x) = x$.
Vérifier que si f' ne prend pas la valeur 1, alors f admet au plus un point fixe.

Exercice 11 Soit h une fonction définie et dérivable sur $[0,3]$. On suppose qu'on a $h(0)=1$, $h(1)=2$ et $h(3)=2$.

1. Montrer qu'il existe un élément c de $[0,3]$ qui vérifie : $f(c)=c$.
2. Montrer qu'il existe un élément d de $[0,3]$ qui vérifie : $f'(d)=\frac{1}{3}$.
3. Montrer qu'il existe un élément e de $[0,3]$ qui vérifie : $f'(e)=\frac{1}{4}$.

Exercice 12 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que

1. la fonction f est bornée
2. sa dérivée f' admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

Montrer que : $\ell=0$.
On pourra, fixer d'abord $x>0$ et appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $2x$, puis faire tendre x vers $+\infty$.

Exercice 13 Soit f une fonction de $\mathbb{R}_\star^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f dérivable sur $\mathbb{R}_\star^+$.

1. Vérifier que l'assertion « si f a une limite finie en $+\infty$, alors f' tend vers zéro en $+\infty$ » est fausse.
   On pourra considérer $x\mapsto \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}}$.
2. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Vérifier qu'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}_\star^+$ qui vérifie : $f'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Exercices divers

Exercice 14 Dans cet exercice, on fixe un entier $n\geq 2$. On considère la fonction $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\quad f(x)=(1+x^n)(1+x)^{-n}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x\geq 0$.
2. En étudiant le signe de f' sur $\mathbb{R}_+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}_+$ que l'on déterminera.
3. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on a
$$(1+x)^n\leq 2^{n-1}(1+x^n),$$
4. Montrer que si x et y sont deux réels positifs, alors on a
$$(y+x)^n\leq 2^{n-1}(y^n+x^n).$$

Exercice 15 Soient a et b deux réels avec $a<b$. On considère une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. On suppose que

— f est dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée f' est continue sur $[a,b]$,
— $f(a)=0$ et $f(b)f'(b)<0$.

Montrer qu'il existe un élément c de $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.
Utiliser le théorème des bornes atteintes et montrer que f atteint l'une de ses deux bornes à l'intérieur de $[a,b]$.

Exercice 16 Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_\star^+$ et que

$$f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}f(0).$$

Montrer qu'il existe un point x de $\mathbb{R}_\star^+$ qui vérifie : $f'(x)=0$.
(*Relire l'exercice 11 sur la continuité.*)

Exercice 17 On définit

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_\star^+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2+2\log(x). \end{array}$$

1. Montrer que f est une bijection.
2. On pose $g=f^{-1}$. Calculer $g'(1)$.
3. Déterminer des réels t et x vérifiant : $g'(t)=5$ et $f(x)=t$.

Exercice 18 Dans cet exercice, on fixe un nombre $s>0$ et pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, on note

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de s pour lesquelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.
2. Dans cette question on suppose $s>1$.
   (a) Soit k un entier naturel. *On suppose* $k\geq 2$. Vérifier qu'il existe un nombre c_k de $](k-1),k[$ qui vérifie :
   $$\frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{k^{s-1}}-\frac{1}{(k-1)^{s-1}}\right)=\frac{1}{c_k^s}.$$
   (b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n\leq\frac{s}{s-1}$. Conclure.
3. Dans cette question on suppose $s=1$.
   (a) Soit k un élément de $\mathbb{N}^\star$. Vérifier qu'il existe un nombre c_k de $]k,k+1[$ qui vérifie : $\ln(k+1)-\ln(k)=\frac{1}{c_k}$.
   (b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, on a $u_n\geq\ln(n)$. Conclure.
4. Traiter le cas $s\in]0,1[$ en comparant $\frac{1}{k^s}$ et $\frac{1}{k}$ pour tout k de $\mathbb{N}^\star$.

Exercice 19
Pour tout entier $n\geq 2$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$f_n : x\mapsto x-\cos\left(\frac{x}{n}\right).$$

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n\in]0,1[$ qui vérifie
   $$x_n=\cos\left(\frac{x_n}{n}\right).$$
2. Montrer que pour tout x de $]0,1[$ et tout entier $n\geq 2$, on a l'inégalité
   $$f_n(x)>f_{n+1}(x).$$
   En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est croissante.
3. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.

Exercice 20 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > \alpha$.

1. Réfléchir à une interprétation graphique de l'hypothèse.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq f(0) + \alpha x$. En déduire que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
3. En raisonnant de même, montrer que f tend vers $-\infty$ en $-\infty$.
4. Vérifier que f est bijective.
5. $(\star)$
   Dans cette question, on suppose de plus qu'il existe $M > 0$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \leq M$.
   On fixe un réel s et on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
   $$u_0 = s \quad \text{et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{M}.$$
   On rappelle que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: on note z l'unique réel qui vérifie $f(z) = 0$.

   Si $s \geq z$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par z, puis qu'elle décroissante, puis qu'elle converge vers z.
   Si $s \leq z$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par z, puis qu'elle croissante, puis qu'elle converge vers z.