Département MIDO, première année

Algèbre 2 : TD 2019/2020

Alexandre Afgoustidis

(version du 27 décembre 2019)

Alexandre Afgoustidis
CEREMADE, Université Paris-Dauphine, 75016 Paris, France.
E-mail : `afgoustidis@ceremade.dauphine.fr`

Ce polycopié a été créé avec LaTeX; pour la mise en forme, nous avons adapté des fichiers de style fournis par la Société Mathématique de France, notamment la classe `smfbook`.

ALGÈBRE 2 : TD 2019/2020

Alexandre Afgoustidis

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

ESPACES VECTORIELS

Combinaisons linéaires. —

Exercice 1.1. — ★☆☆

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$,
   (a) le vecteur $(1, 2, 3)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(-2, 3, 1)$ et $(1, -1, 0)$?
   (b) le vecteur $(7, 7, 1)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(4, 3, 0)$ et $(3, 4, 0)$?
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$,
   (a) le vecteur $16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $X^3 - 9X^2 + 1$ et $X^2 + 3$?
   (b) Le vecteur $16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $8X^3 - 5X^2 + 1$ et $X^2 + 7X - 2$?
3. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
   (a) le vecteur $x \mapsto \cos^2(x)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \cos(2x)$?
   (b) le vecteur $x \mapsto \sin(2x)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs sin et cos ?

Exercice 1.2. — ★☆☆

1. Dans $\mathbb{C}^2$,
   - $(-1, 1 + i)$ peut-il être exprimé comme combinaison linéaire *à coefficients réels* de $(1, 0)$ et $(2, i)$?
   - Peut-il être exprimé comme combinaison linéaire *à coefficients complexes* de $(1, 0)$ et $(2, i)$?

2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$,
   - $\begin{pmatrix} 3i & 4 \\ 0 & 2+5i \end{pmatrix}$ peut-elle être exprimée comme combinaison linéaire *à coefficients réels* de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4+i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 7i \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$?
   - Peut-elle être exprimée comme combinaison linéaire *à coefficients complexes* des mêmes matrices ?

Exercice 1.3. — ★☆☆

1. Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A^2 est combinaison linéaire de A et I_2.
2. Donner un exemple de matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que A^2 ne soit pas combinaison linéaire de A et I_3.

Exercice 1.4. — ★☆☆ On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$, on note e_α la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Démontrer, en utilisant le comportement à l'infini, que la fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$ n'est pas combinaison linéaire de $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$.

Notion de sous-espace vectoriel. —

Exercice 1.5. — ★☆☆

1. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?
   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y \text{ et } x \geq 0\}$
   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 5y = 1\}$
   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0\}$
2. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?
   (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 1\}$
   (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ y = 0\}$
   (c) $\{(x,2x,3x),\ x \in \mathbb{R}\}$
   (d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ y^2 - x^3 = 0\}$
   (e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y \text{ et } 3y - 2z = 0\}$

Exercice 1.6. — ★☆☆

1. Les parties suivantes de $\mathbb{R}[X]$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?
   (a) $\{P \in \mathbb{R}[X],\ \deg(P) \leq 2\}$
   (b) $\{P \in \mathbb{R}[X],\ \deg(P) \geq 2\}$
   (c) $\{P \in \mathbb{R}[X],\ P(X^2) = P' + X^4 P\}$
2. Soit n un entier, $n \geq 2$. Les parties suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?
   (a) $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{la deuxième colonne de } M \text{ est nulle}\}$,
   (b) $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{deux colonnes de } M \text{ sont identiques}\}$.

Exercice 1.7. — ★★☆

Les parties suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

1. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(0) = f(1)\}$,
2. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(0) = 1\}$.
3. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)\}$.
4. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(x)^2\}$.
5. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = -xf(x)\}$.

Exercice 1.8. — ★☆☆

1. Donner un exemple de sous-ensemble non vide U de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie
$$\begin{aligned} \forall u \in U, \forall v \in U, &\qquad u + v \in U \\ \forall u \in U, &\qquad -u \in U \end{aligned}$$
   mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
2. Donner un exemple de sous-ensemble non vide U de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie :
$$\forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda \cdot u \in U$$
   mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

***Exercice 1.9* (Contrôle continu, 2012). — ★☆☆**

On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y \geq 0\right\}$$
$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y \leq 0 \text{ et } z = 0\right\}.$$

1. Les parties E et F sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?
2. La partie $E \cap F$ est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

***Exercice 1.10.* — ★☆☆**

1. Montrer que l'espace des suites *nulles à partir d'un certain rang* est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
2. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *à support compact* s'il existe un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ en dehors duquel f est identiquement nulle. Montrer que l'ensemble des fonctions continues et à support compact est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

***Exercice 1.11.* — ★☆☆**

Soit E un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$. Montrer qu'on a soit $E = \{0\}$, soit $E = \mathbb{R}$.

***Exercice 1.12.* — ★☆☆**

1. Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note $\Gamma_f = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ y = f(x)\right\}$ son graphe.

   Montrer que Γ_f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si f est une fonction linéaire.
2. Si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on note $\Gamma_f = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ z = f(x, y)\right\}$ son graphe. Montrer que Γ_f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement s'il existe a et b vérifiant : pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, $f(x, y) = ax + by$.

***Exercice 1.13* (Unions de sous-espaces vectoriels). — ★★☆**

Soit E un espace vectoriel réel.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

   Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. Soit k un entier naturel non nul et $(F_1, F_2, ...F_k)$ une famille de k sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_k$ est un sous-espace vectoriel de E ;
   (ii) "L'un des F_i contient tous les autres" : il existe un élément i_0 de $\{1, ...k\}$ vérifiant :
   $\forall j \in \{1, ...k\}, F_j \subset F_{i_0}$.

   Indication : on pourra raisonner par récurrence descendante sur k.

***Exercice 1.14* (Ensembles de fonctions périodiques). — ★★☆ à ★★★**

1. Montrer que l'ensemble des fonctions 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. (a) Montrer que si p et q sont deux entiers et f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, si f est p-périodique et si g est q-périodique, alors $f+g$ est $\mathrm{ppcm}(p,q)$-périodique.
   (b) En déduire que
   $$\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists \alpha \in \mathbb{Q}, f \text{ est } \alpha\text{-périodique}\}$$
   est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. ★★★ Montrer que l'ensemble des fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Sous-espace engendré. —

***Exercice 1.15* (Manipulation du Vect[...] dans $\mathbb{R}^3$).** — ★☆☆
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que u appartient à $\mathbf{Vect}[s,t]$ et que v appartient à $\mathbf{Vect}[s,t]$. Qu'en déduit-on sur $\mathbf{Vect}[u,v]$?
2. Montrer que $\mathbf{Vect}[u,v] = \mathbf{Vect}[s,t]$.

***Exercice 1.16* (Une discussion à paramètre).** — ★☆☆
Soit a un nombre réel. On considère $u = (1,-1,1)$ et $v = (0,1,a)$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le vecteur $(1,1,2)$ appartienne à $\mathbf{Vect}[u,v]$.

***Exercice 1.17* (Est-il dans le Vect[...] ?)** — ★☆☆
Dans $\mathbb{R}^4$, notons $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Existe-t-il des réels x et y tels que $\begin{pmatrix} -2 \\ x \\ y \\ 3 \end{pmatrix}$ appartienne à $\mathbf{Vect}[u,v]$?

***Exercice 1.18* (Matrices de trace nulle).** — ★☆☆
On note $\mathfrak{sl}_2$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{Tr}(M) = 0$.
Vérifier que $\mathfrak{sl}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que
$$\mathfrak{sl}_2 = \mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right].$$
Démontrer qu'on a en revanche
$$\mathfrak{sl}_2 \neq \mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right].$$

Familles génératrices. —

Exercice 1.19. — ★☆☆

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\big((1,1)\,,(3,1)\big)$ est-elle génératrice ?
2. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\big((1,1,2)\,,(1,2,1)\big)$ est-elle génératrice ?
3. La famille $\big((1,1,2)\,,(1,2,1)\,,(1,0,-1)\big)$ l'est-elle ? Et la famille $\big((1,1,2)\,,(1,2,1)\,,(1,0,-1)\,,(4,8,99)\big)$?

***Exercice 1.20* (Contrôle continu, 2015).** — ★☆☆
Parmi les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ (familles a, b, c) ou $\mathbb{R}^2$ (famille d), lesquelles sont génératrices ?

a. $(1,0,0)$, $(1,1,1)$.
b. $(2,2,1)$, $(1,2,1)$, $(4,6,3)$.
c. $(3,4,5)$, $(4,0,6)$, $(0,8,9)$.
d. $(1,-1)$, $(0,1)$, $(32,-7)$.

Exercice 1.21. — ★☆☆
Dans $\mathbb{R}^3$, notons $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Soit m un nombre réel.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\begin{pmatrix} m \\ 2m \\ m+1 \end{pmatrix}$ soit contenu dans $\mathbf{Vect}[u,v]$.

Autres exercices sur le sous-espace engendré et les familles génératrices. —

Exercice 1.22. — ★☆☆
Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces $F = \mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right]$ et $G = \mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$.
(la question signifie : a-t-on $F \subset G$? A-t-on $G \subset F$?)

Exercice 1.23. — ★☆☆
Démontrer l'égalité
$$\mathbb{R}_2[X] = \mathbf{Vect}\big[(X-1)^2, (X+1)^2, (X-1)(X+1)\big]\,.$$

Exercice 1.24. — ★☆☆
Soient E un espace vectoriel réel, n un entier naturel non nul, $(v_1, v_2, ...v_n)$ une famille de n vecteurs de E. Démontrer que
$$\mathbf{Vect}[v_1, v_2, ...v_n] = \mathbf{Vect}[v_1 - v_2,\ v_2 - v_3, \dots\ ,\ v_{n-1} - v_n,\ v_n]\,.$$

Familles libres et liées : cas de familles finies. —

Exercice 1.25 **(Exemples concrets dans $\mathbb{R}^n$). — ★☆☆**
Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1} = (1,0,1)$, $\vec{v_2} = (0,2,2)$ et $\vec{v_3} = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1} = (1,0,0)$, $\vec{v_2} = (0,1,1)$ et $\vec{v_3} = (1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\vec{v_1} = (1,2,1,2,1)$, $\vec{v_2} = (2,1,2,1,2)$, $\vec{v_3} = (1,0,1,1,0)$ et $\vec{v_4} = (0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $\vec{v_1} = (2,4,3,-1,-2,1)$, $\vec{v_2} = (1,1,2,1,3,1)$ et $\vec{v_3} = (0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $\vec{v_1} = (2,1,3,-1,4,-1)$, $\vec{v_2} = (-1,1,-2,2,-3,3)$ et $\vec{v_3} = (1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Exercice 1.26 **(Ne pas confondre liberté et non-colinéarité). — ★☆☆**
Donner un exemple de famille (u,v,w) de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

- les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, les vecteurs v et w non plus, les vecteurs w et u non plus ;
- la famille (u,v,w) est liée.

Exercice 1.27 **(Liberté de petites familles dans un espace abstrait)**
★☆☆
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ une famille de quatre vecteurs linéairement indépendants de E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3})$,
2. $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$,
3. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_4})$,
4. $(3\vec{e_1} + \vec{e_3}, \vec{e_3}, \vec{e_2} + \vec{e_3})$,
5. $(2\vec{e_1} + \vec{e_2}, \vec{e_1} - 3\vec{e_2}, \vec{e_4}, \vec{e_2} - \vec{e_1})$.

Exercice 1.28 **(Les matrices JPEG). — ★★★**

1. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, la famille $(u_1, ...u_4)$ est libre.
   (b) Si i et j sont des entiers entre 1 et 4, on pose $U_{ij} = u_i u_j^T$ (c'est une matrice 4×4).
   Écrire explicitement toutes les matrices U_{ij}, $(i,j) \in \{1...4\}^2$ (*il faut de la patience*).
   (c) Montrer que dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, la famille $(U_{ij})_{(i,j)\in\{1...4\}^2}$ est libre (*il faut de la patience...*).
2. Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(u_1, u_2, ...u_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
   Si i et j sont des entiers entre 1 et n, on pose $U_{ij} = u_i u_j^T$.
   (a) Montrer que si la famille $(u_1, ...u_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^n$, alors la famille $(U_{ij})_{(i,j)\in\{1...n\}^2}$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que si la famille $(U_{ij})_{(i,j)\in\{1...n\}^2}$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors la famille $(u_1, ...u_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1.29. **— ★★☆**
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(u_1, ...u_n)$ une famille de n vecteurs de E.
Pour chaque k de $\{1, ...n\}$, on note $v_k = u_1 + ... + u_k$.

1. Montrer que la famille $(v_1, ...v_n)$ est libre si et seulement si la famille $(u_1, ...u_n)$ est libre.

2. Montrer que la famille $(v_1, ...v_n)$ est génératrice de E si et seulement si la famille $(u_1, ...u_n)$ est génératrice de E.

Familles libres et liées : cas de familles infinies. —

***Exercice 1.30* (Liberté d'une famille infinie de fonctions).** — ★★☆ Pour chaque α de $\mathbb{R}$, on note f_α la fonction $x \mapsto x^\alpha$ de $\mathbb{R}_\star^+$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}_\star^+, \mathbb{R})$, la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.
2. Montrer que ce n'est pas une famille génératrice de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_\star^+, \mathbb{R})$.

***Exercice 1.31* (Liberté de familles infinies de polynômes).** — ★★☆

1. Pour chaque entier naturel k, on note P_k le polynôme $X(X + 1)...(X + k - 1)$.
   Montrer que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.
2. Pour chaque entier naturel k, on note P_k le polynôme $(X - k)^2$.
   Montrer que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est liée.
3. Si k est un entier naturel pair, on note P_k le polynôme X^{k+1} ;
   si k est un entier naturel impair, on note P_k le polynôme $(X - 1)^k$.
   Montrer que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

***Exercice 1.32* (Irrationnalité de certains logarithmes).** — ★★★
Rappelons qu'on peut voir $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. Soit $(x_1, ...x_k)$ une famille de k nombres réels.
   Montrer qu'elle est liée dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe des <u>entiers</u> $n_1, ..n_k$ de $\mathbb{Z}$ tels que $n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k = 0$.
2. Soit $\mathbf{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...\}$ l'ensemble des nombres premiers. Rappeler pourquoi $\mathbf{P}$ est infini.
3. Montrer que dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, la famille $(\ln p)_{p\in\mathbf{P}}$ est libre (*on utilisera la première question*).
4. En déduire qu'il existe au plus un nombre premier p tel que $\ln(p)$ soit rationnel.
   (*commentaire : en fait il n'en existe aucun, et* $\ln(x)$ *est toujours irrationnel dès que* x *est rationnel, mais c'est beaucoup plus difficile à démontrer*).

Exercices divers. —

Exercice 1.33. — ★☆☆ On considère les matrices $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

On note

$$\mathfrak{g} = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \bar{A}^T = -A\right\},$$
$$\mathfrak{s} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \mathrm{Tr}(A) = 0\}.$$

1. Montrer que dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, la famille $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est libre.
2. Dans cette question, on voit $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
   (a) Montrer que $\mathfrak{g}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   (b) Montrer que la famille $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ n'est pas génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   (c) Montrer l'égalité $\mathbf{Vect}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] = \mathfrak{s}$.
3. Dans cette question, on voit $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (*rappel : cela change la signification de* $\mathbf{Vect}[...]$).

(a) Montrer que $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
(b) Montrer l'inclusion $\mathbf{Vect}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] \subset \mathfrak{g}$.
(c) Montrer l'égalité $\mathbf{Vect}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{g}$.

Exercice 1.34. — ★★★ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour chaque entier naturel n, on suppose que f_n ne s'annule pas et que $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

1. Montrer que dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille (f_n) est libre.
2. Montrer que la famille (f_n) n'est pas génératrice de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

CHAPITRE 2

BASES ET DIMENSION

Bases et notion de coordonnées. —

***Exercice 2.1* (Un cas concret dans $\mathbb{R}^3$).** — ★☆☆
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les coordonnées de $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$ dans cette base.

***Exercice 2.2* (Sous-espace défini par une seule équation).** — ★★☆

1. Notons E l'ensemble $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z + t = 0\right\}$.
   Vérifier que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}^\star$; soient $a_1, ...a_n$ des nombres réels. On considère l'ensemble

$$H = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ a_1 x_1 + ... + a_n x_n = 0\}.$$

   Montrer que si $a_1, ..., a_n$ ne sont pas tous nuls, H est un sous-espace vectoriel de dimension $(n-1)$ de $\mathbb{R}^n$.

***Exercice 2.3* (Des cas concrets dans $\mathbb{R}^3$).** — ★☆☆

1. Montrer que les vecteurs $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
   Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $w = (1, 1, 1)$.
2. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 0, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
   Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur celles du vecteur $(1, 0, 0)$, celles du vecteur $(1, 2, -3)$, celles du vecteur $(1, 1, 1)$, celles du vecteur $(0, 1, -1)$.
3. Donner un exemple de famille libre de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas génératrice.
4. Donner un exemple de famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas libre.

***Exercice 2.4* (Cas concrets avec des polynômes).** — ★☆☆

1. On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on note

$$P_0(X) = (X+1)^2, \quad P_1(X) = (X-1)^2, \ \text{ et } \ P_2(X) = 3.$$

   (a) Vérifier que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Soient a, b, c trois réels. Ecrire les coordonnées du polynôme $aX^2 + bX + c$ dans la base (P_0, P_1, P_2).
2. On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ et on note
$$Q_0(X) = X^3 + X^2 - X - 1, \quad Q_1(X) = X^3 - X^2 + 1, \quad Q_2(X) = X^3 - X^2 + X \text{ et } Q_3(X) = X^3 + 2X + 1.$$
   (a) Vérifier que (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Quelles sont les coordonnées du polynôme X^2 dans cette base ?

Notion de dimension : premières manipulations. —

***Exercice 2.5* (Systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$).** — ★☆☆

1. Donner la dimension et une base de $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$.
2. Donner la dimension et une base de $E_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{array}{r} x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{array} \right\}$.
3. Même question avec $F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z = 0\}$ et $F_2 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x - z + t = 0 \end{array} \right\}$.
4. Même question avec $F_3 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x - z + t = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array} \right\}$ et $F_4 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 2x - z + t = 0 \\ 3x + y + t = 0 \end{array} \right\}$.

***Exercice 2.6* (Quelques espaces de polynômes ou de matrices).** — ★☆☆

1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) En donner la dimension et une base.
2. On considère l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)\}$.
   (a) Justifier que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) En donner la dimension et une base.
3. On considère l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \ / \ P(0) = P(1) = P(2)\}$
   (a) Justifier que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
   (b) En donner la dimension et une base.

***Exercice 2.7* (Recherche de bases extraites).** — ★☆☆

1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les cinq vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$.

   Soit $F = \textbf{Vect}[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]$. Donner la dimension de F et une base de F extraite de la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs suivants : $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_4 = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Soit $G = \textbf{Vect}[w_1, w_2, w_3, w_3]$. Donner la dimension de G et une base de G extraite de la famille (w_1, w_2, w_3, w_3).

***Exercice 2.8* (Compléter une famille libre en une base). — ★☆☆**

1. Montrer que la famille $((8,4,1,2),(1,3,0,5))$ est libre dans $\mathbb{R}^4$; la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que la famille $(X^3+X+1, X^3-2X+2, X^2+3X)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$; la compléter en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1,e_2,e_3) une base de E.
   On pose $u_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$ et $u_2 = e_2 - e_3$.
   Montrer que la famille (u_1,u_2) est libre et la compléter en une base de E.

***Exercice 2.9* (Contrôle continu, 2013). — ★☆☆**
Soit E le sous espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$u = (1,-2,5,-3), \quad v = (2,3,1,-4) \quad \text{et} \quad w = (3,8,-3,-5)\,.$$

1. La famille (u,v,w) est elle libre ? Génératrice de $\mathbb{R}^4$?
2. Trouver une base de E dont les éléments seront choisis parmi les vecteurs donnés précédemment. On la note $\mathcal{B}$.
3. Le vecteur $(13,16,11,-27)$ appartient-il à E ?
4. Compléter la base $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

Notion de dimension : plus abstrait. —

***Exercice 2.10.* — ★☆☆**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(P_0,...P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie : pour tout j de $\{0,..,n\}$, $P_j(2)=0$.
Montrer que la famille $(P_0,...P_n)$ est liée dans $\mathbb{R}_n[X]$.

***Exercice 2.11* (Polynômes interpolateurs de Lagrange). — ★★☆**
Dans cet exercice, on fixe un entier naturel n et des nombres réels $a_0, a_2, ..., a_n$.

Pour chaque entier i entre 0 et n, on note L_i le polynôme $\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$.

Par exemple si $n=2$ et $(a_0,a_1,a_2) = (5,-3,\sqrt{2})$, on a $L_0(X) = \frac{(X+3)(X-\sqrt{2})}{(5+3)(5-\sqrt{2})}$, $L_1(X) = \frac{(X-5)(X-\sqrt{2})}{(-3-5)(-3-\sqrt{2})}$ et $L_2(X) = \frac{(X-5)(X+3)}{(\sqrt{2}-5)(\sqrt{2}+3)}$.

1. Quel est le degré des L_i, $i \in \{0,..n\}$?
2. Vérifier que pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, on a

   $$P(X) = P(a_0)\;L_0(X) + P(a_1)\;L_1(X) + ... + P(a_n)\;L_n(X)$$

   (la démonstration n'est *pas* un gros calcul).
3. En déduire que la famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Dans cette question, on prend $n=2$ et $(a_0,a_1,a_2) = (5,-3,\sqrt{2})$.
   Quelles sont les coordonnées du polynôme X^2 dans la base (L_0,L_1,L_2) de $\mathbb{R}_2[X]$?

***Exercice 2.12.* — ★☆☆**
Soit n un élément de $\mathbb{N}^\star$ et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un entier d tel que la famille $(I_n, M, M^2, ..., M^d)$ soit liée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie $P(M)=0$.

***Exercice 2.13* (Des espaces de fonctions). — ★★☆**
On note E l'ensemble des applications C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note F l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivante : il existe trois réels a, b, c tels qu'on ait

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \in]-\infty, 0]\,, \\ cx^2 & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de dimension infinie de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Donner une base de F et sa dimension.
4. Donner une base de $F \cap E$ et sa dimension.

***Exercice 2.14* (Contrôle continu, 2012). — ★★☆**
Soit F l'ensemble des fonctions de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont affines sur $[-1, 0]$, affines sur $[0, 1]$ et continues sur $[-1, 1]$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$.
2. Donner une base de F et sa dimension.

***Exercice 2.15* (Sinus et déphasage). — ★★☆**
Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto A\sin(x + \varphi)$$

où A et φ sont des nombres réels.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Quelle est sa dimension ? (il faut justifier la réponse)
3. Soient a, b et c trois réels deux à deux distincts. On note s_a la fonction $x \mapsto \sin(x + a)$, s_b la fonction $x \mapsto \sin(x + b)$, s_c la fonction $x \mapsto \sin(x + c)$. Montrer que la famille (s_a, s_b, s_c) est liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

***Exercice 2.16* (Contrôles continus, 2015 et 2016). — ★☆☆**
On considère l'espace vectoriel $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, on note $f_k(x) = x^k$.
   (a) Montrer que la famille $\{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est une famille libre.
   (b) En déduire que E est de dimension infinie.
2. Pour tout i de $\mathbb{N}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, on note $f_i(x) = x^i e^x$.
   (a) Montrer que la famille $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de E.
   (b) En déduire que E est de dimension infinie.

Rang, équations de sous-espaces. —

***Exercice 2.17* (Un cas typique dans $\mathbb{R}^4$). — ★☆☆**
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Donner le rang de la famille (v_1, v_2, v_3) et une base de $F = \mathbf{Vect}[v_1, v_2, v_3]$.
2. Décrire F comme ensemble des solutions d'un système homogène.

3. Les familles

$$\mathcal{A}_1 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right), \mathcal{A}_2 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\6\\9\end{pmatrix}\right), \mathcal{A}_3 = \left(\begin{pmatrix}3\\5\\7\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right), \mathcal{A}_4 = \left(\begin{pmatrix}3\\5\\7\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}\right), \mathcal{A}_5 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\7\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

sont-elles des bases de F ?

***Exercice 2.18* (Pour s'entraîner dans $\mathbb{R}^3$). — ★☆☆**

Pour chacune des trois familles (v_1, v_2, v_3) de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous,

- Dire si (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$;
- Si c'est le cas, écrire les coordonnées du vecteur $(1, 8, 13)$ dans cette base ;
- Si ce n'est pas le cas, donner le rang de (v_1, v_2, v_3) et décrire $\mathbf{Vect}[v_1, v_2, v_3]$ comme ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

a. $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (-1, 1, -1)$.
b. $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (1, 8, 13)$.
c. $v_1 = (1, 2, -3), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 10, -11)$.

***Exercice 2.19* (Pour s'entraîner dans $\mathbb{R}^4$). — ★☆☆**

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles de vecteurs suivantes :

a. $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ où $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 2, -1)$, $u_3 = (1, 0, -2, 3)$, $u_4 = (2, 1, 0, -1)$, $u_5 = (4, 3, 2, 1)$.
b. (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (3, 4, 5, 16)$.
c. (w_1, w_2, w_3, w_4) où $w_1 = (1, 2, 3, 4)$, $w_2 = (0, 1, 2, -1)$, $w_3 = (2, 1, 0, 11)$, $w_4 = (3, 4, 5, 14)$.

Pour chacune de ces familles, dire

1. Si c'est une famile libre de $\mathbb{R}^4$, puis
   - si elle est libre, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$,
   - si elle est liée, en donner une sous-famille libre maximale et exprimer les autres vecteurs de la famille de départ comme combinaison linéaire de votre sous-famille.
2. Si c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$, puis
   - si elle est génératrice, en extraire une base de $\mathbb{R}^4$,
   - si elle ne l'est pas, donner son rang et une base du sous-espace qu'elle engendre.

Problèmes. —

***Exercice 2.20* (Liberté et restriction des scalaires à $\mathbb{Q}$). — ★★★**

Dans cet exercice, on fixe un entier $n \geq 1$, un entier k entre 1 et n, et on considère une famille $(v_1, ..., v_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour chaque i de $\{1, .., k\}$, les coordonnées de v_i dans la base canoniques sont des nombres rationnels : on note

$$v_1 = \begin{pmatrix}v_1(1)\\v_1(2)\\\vdots\\v_1(n)\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}v_2(1)\\v_2(2)\\\vdots\\v_2(n)\end{pmatrix}, ... \text{ et } v_k = \begin{pmatrix}v_k(1)\\v_k(2)\\\vdots\\v_k(n)\end{pmatrix}.$$

et notre hypothèse est ainsi que pour tout i de $\{1, ..., k\}$ et pour tout j de $\{1, ..., n\}$, on a $v_i(j) \in \mathbb{Q}$.

1. (a) On note $F = \mathbf{Vect}[v_1, ..., v_k]$ .Montrer qu'il existe une base de F formée de vecteurs dont les coordonnées (dans la base canonique) appartiennent toutes à $\mathbb{Q}$.
   (b) Donner un exemple de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ dont aucune base n'est formée de vecteurs ayant toutes leurs coordonnées (dans la base canonique) rationnelles.

On dit qu'une famille de vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ de $\mathbb{R}^n$ est $\mathbb{Q}$-*libre* lorsque

si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ *sont des nombres* <u>*rationnels*</u>*, l'égalité* $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$ *implique que tous les* λ_i*,* $i \in \{1..p\}$*, soient nuls.*

Lorsque cette propriété n'est pas vérifiée, on dit que la famille est $\mathbb{Q}$-*liée*.

2. Montrer que si une famille de vecteurs est libre au sens usuel dans $\mathbb{R}^n$, alors elle est $\mathbb{Q}$-libre.
3. Dans cette question, on suppose que la famille $(v_1, ..., v_k)$ est $\mathbb{Q}$-libre. On souhaite démontrer que cette famille est libre au sens usuel.

   On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x ; de plus, si $v = \begin{pmatrix} v(1) \\ \vdots \\ v(n) \end{pmatrix}$ est une vecteur de $\mathbb{R}^n$, on définit $\|v\| = \sum_{i=1}^{n} |v(j)|$.
   (a) Montrer que la propriété :
   « Pour toute famille $(u_1, \ldots, u_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées **entières**, le fait d'être $\mathbb{Q}$ libre implique le fait d'être libre au sens usuel »
   permet d'obtenir le résultat voulu sur la famille $(v_1, \ldots, v_k)$. (0,5 point)
   (b) Dans cette question, on suppose que $(u_1, \ldots, u_k)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées **entières**.
   On suppose de plus que $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des nombres **réels** tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0$. Montrer
   $$\| \sum_{i=1}^{k} E[\lambda_i] u_i \| \leq \sum_{i=1}^{k} \|u_i\| \, . \tag{0.1}$$
   (c) **[Difficile.]** Démontrer alors que la famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est libre au sens usuel (on pourra utiliser le résultat précédent pour une famille de réels de la forme $(10^{\ell}\lambda_i)$ avec ℓ bien choisi). Conclure. *(Indication : le nombre de vecteurs à coordonnées entières vérifiant l'inégalité* (0.1) *est fini.)*

Exercice 2.21 **(Autour des matrices de permutation).** — ★★★
Dans cet exercice, on fixe n dans $\mathbb{N}^\star$ et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Si σ est une *permutation de* $\{1, .., n\}$, c'est-à-dire une bijection de $\{1, ..., n\}$ dans lui-même, on note P_σ la matrice dont la première colonne est $e_{\sigma(1)}$, la deuxième est $e_{\sigma(2)}$, et pour chaque j de $\{1, .., n\}$, la $j$ème colonne est $e_{\sigma(n)}$.

1. (a) Ecrire explicitement toutes les matrices de permutation lorsque $n = 2$, puis lorsque $n = 3$.
   (b) Montrer que si σ et τ sont deux permutations de $\{1, ..., n\}$, on a $P_{\sigma \circ \tau} = P_\sigma P_\tau$.
   (c) En déduire que pour toute permutation σ de $\{1, .., n\}$, on a $P_\sigma^T = P_{\sigma^{-1}}$.
   (d) Si on fixe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une permutation σ, décrire les matrices $P_\sigma M$ et $M P_\sigma$.
2. On note V_n l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute permutation σ, $P_\sigma M = M P_\sigma$.
   (a) Montrer que V_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
   (c) En déduire la dimension de V_2 et en donner une base.
   (d) En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout $n \geq 2$, on a
   $$V_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & \ldots & \ldots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & \ldots & b & a \end{pmatrix}, \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

(on pourra commencer par regarder la matrice $(n-1)\times(n-1)$ située en haut à gauche d'un élément de V_n).

(e) Donner la dimension et une base de V_n.

Exercice 2.22 **(Suites récurrentes linéaires d'ordre 2).** — ★★☆

1. Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   (a) Rappeler pourquoi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, donner sa dimension, en donner une base.
   (b) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique élément de E qui vérifie $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. C'est la *suite de Fibonacci*[1]. Déterminer explicitement F_n en fonction de n.
2. Soit F l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
   (a) Donner la dimension et une base de F.
   (b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique élément de E qui vérifie $v_0 = 0$ et $v_1 = 2$.
   Déterminer explicitement v_n en fonction de n.
3. Soit G l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -\omega^2 u_n$.
   Donner une base de G. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, donner explicitement l'unique élément u de G qui vérifie $u_0 = a$ et $u_1 = b$.
4. On fixe deux fonctions a et b de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit V l'ensemble des fonctions dérivables f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a(x)f(x) + b(x).$$
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que V soit un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
   (b) Lorsque cette condition est vérifiée, donner une base de V.

1. Fibonacci a proposé l'exercice suivant en 1202 (vous avez bien lu, il y a 815 ans) :
« *Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?* ».

CHAPITRE 3

SOMMES ET SUPPLÉMENTAIRES

Notion de somme. —

***Exercice 3.1* (Pour s'entraîner dans $\mathbb{R}^4$).** — ★☆☆

1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $E = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{array}{r} x-2z=0 \\ y=0 \end{array} \right\}$ et $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{array}{r} x-3z+t=0 \\ z-t=0 \end{array} \right\}$.

   Vérifier que $E+F$ est l'ensemble $\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x-2z=0 \}$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -2y \end{pmatrix}, \ y \in \mathbb{R} \right\}$ et $W = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\}$.

   Vérifier qu'on a $U+V = U+W$.

***Exercice 3.2* (Contrôle continu, 2014).** — ★☆☆

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant :

(i) $F \cap H = G \cap H$,
(ii) $F + H = G + H$
(iii) $F \subset G$.

1. Soit $g \in G$. Montrer qu'il existe $f \in F$ et $h \in H$ tels que $g = f + h$.
2. En déduire que $F = G$.

***Exercice 3.3* (Sous-espace somme et intersection).** — ★☆☆

Soient E, F, G des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

1. (a) Montrer l'inclusion : $(E \cap F) + (E \cap G) \subset E \cap (F+G)$.
   (b) A-t-on toujours : $(E \cap F) + (E \cap G) = E \cap (F+G)$?
2. (a) Montrer l'inclusion $E + (F \cap G) \subset (E+F) \cap (E+G)$.
   (b) A-t-on toujours $E + (F \cap G) = (E+F) \cap (E+G)$?

***Exercice 3.4* (Contrôle continu, 2012).** — ★☆☆

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Si

(i) $F + G = E$,
(ii) $F \cap H = \{0\}$,
(iii) $G \subset H$,

montrer que $G = H$.

Formule de Grassmann. —

Exercice 3.5. — ★☆☆
Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^8$ vérifiant : $\dim(U) = 3$, $\dim(V) = 5$ et $U + V = \mathbb{R}^8$.
Montrer que $U \cap V = \{0\}$.

Exercice 3.6. — ★☆☆
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E vérifiant : $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$.
Montrer qu'il existe un vecteur non nul de E qui appartient à la fois à F et à G.

Exercice 3.7. — ★☆☆
On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on note $a = (0,0,1,0)$, $b = (1,1,0,-1)$, $u = (1,0,1,0)$, $v = (0,1,-1,0)$, $w = (1,1,1,1)$.
On considère les sous-espaces $F = \mathbf{Vect}[a,b]$ et $G = \mathbf{Vect}[u,v,w]$.
Déterminer les dimensions de F, de G, de $F+G$, de $F \cap G$.

Exercice 3.8. — ★☆☆
Soient $\vec{v_1} = (1,2,3,4), \vec{v_2} = (2,2,2,6), \vec{v_3} = (0,2,4,4), \vec{v_4} = (1,0,-1,2), \vec{v_5} = (2,3,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.
Soient $F = Vect\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ et $G = Vect\{\vec{v_4}, \vec{v_5}\}$.
Déterminer une base des sous-espaces $F \cap G$, F, G et $F + G$.

***Exercice 3.9* (Contrôle continu, 2012).** — ★☆☆
Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$F := \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ ; b - 2c + d = 0\right\}$$

et

$$G := \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ ; a = d \text{ et } b = 2c\right\} .$$

1. Donner une base de F, de G et de $F \cap G$.
2. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Sommes directes, cas de deux sous-espaces. —

***Exercice 3.10* (Contrôle continu, 2014).** — ★☆☆
Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (0,1,-1,2)$, $v_3 = (2,-1,-1,2)$ et $v_4 = (3,-1,-1,2)$.

1. Montrer que $\mathbf{Vect}[v_1, v_2]$ et $\mathbf{Vect}[v_3, v_4]$ sont en somme directe.
2. En déduire que $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de E.
3. Donner les coordonnées de $w = (1,2,3,4)$ dans la base B.

***Exercice 3.11* (Une question à paramètre).** — ★☆☆

Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel λ pour que les sous-espaces $\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right]$ et $\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right]$ de $\mathbb{R}^4$ soient en somme directe.

Exercice 3.12. — ★☆☆

On donne ci-dessous des vecteurs x, y, u, v de $\mathbb{R}^4$. On note $M = \mathbf{Vect}[x, y]$ et $N = \mathbf{Vect}[u, v]$.

Dans quels cas a-t-on $\mathbb{R}^4 = M \oplus N$?

(a) $x = (1, 1, 0, 0)$, $y = (1, 0, 1, 0)$, $u = (0, 1, 0, 1)$, $v = (0, 0, 1, 1)$;

(b) $x = (-1, 1, 1, 0)$, $y = (0, 1, -1, 1)$, $u = (1, 0, 0, 0)$, $v = (0, 0, 0, 1)$;

(c) $x = (1, 0, 0, 1)$, $y = (0, 1, 1, 0)$, $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, 0, 1)$.

Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel. —

Exercice 3.13. — ★☆☆

On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on note

$$F = \left\{ \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \begin{matrix} x+y+z=0 \\ y-z+t=0 \end{matrix} \right\} \text{ et } G = \mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right].$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

***Exercice 3.14* (Différence entre dimension infinie et dimension finie)**

★☆☆

1. On note $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}$.
   Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. On note $U = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(X^2) = X^2P(X)\}$ et $V = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = P(2)\}$.
   Montrer que U et V sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

***Exercice 3.15* (Recherche concrète de supplémentaires).** — ★☆☆

1. Dans $\mathbb{R}^5$, on note $u_1 = (1, 2, 1, 1, 2)$, $u_2 = (1, 2, 2, 1, 2)$.
   Montrer que (u_1, u_2) est libre. La compléter en une base de $\mathbb{R}^5$.
   En déduire un supplémentaire de $\mathbf{Vect}[u_1, u_2]$ dans $\mathbb{R}^5$.
2. On note $v_1 = (2, 2, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 3, 3, 1)$. Mêmes questions pour la famille (v_1, v_2, v_3).

***Exercice 3.16* (Contrôle continu, 2016).** — ★☆☆

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ :\ x + 2y + 4z = 1 \text{ et } t + 2x = 0\}$.

1. Donner une base de F et sa dimension.
2. Donner un supplémentaire de F et une base de ce supplémentaire.

Exercice 3.17 **(Recherche de supplémentaires : entraînement).** — ★☆☆
Pour chacun des couples (E, F) suivants où E est un espace vectoriel et F un sous-espace de E, donner

- la dimension de F
- un supplémentaire de F dans E.

On ne demande pas de justifier que F est un sous-espace vectoriel.

(a) $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbf{Vect}[(1,2,1,1),(2,2,1,1),(0,2,1,1)]$.
(b) $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+2z-t=0 \text{ et } y-z+t=0\}$.
(c) $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(-X) = P(X)\}$.
(d) $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = P'(0)\}$
(e) $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P'(X) + 3P(X) = P(0)X^3 + P(1)(X+1)\}$

Exercice 3.18 **(Interprétation de la division euclidienne).** — ★☆☆
Dans cet exercice, on fixe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$.

On note V_P l'ensemble des polynômes divisibles par P : ainsi, $V_P = \{V \in \mathbb{R}[X],\ \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ V(X) = P(X)Q(X)\}$.

1. Montrer que V_P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que V_P est de dimension infinie.
3. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un supplémentaire de V_P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3.19 **(Supplémentaires communs).** — ★★★
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E qui est supplémentaire à la fois de E_1 et de E_2.
(on pourra raisonner par récurrence descendante sur la dimension commune à E_1 et E_2.)

Y-a-il unicité de ce supplémentaire ?

Exercice 3.20 **(Supplémentaires et intersection).** — ★★☆
Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Soient F_1, F_2 et G trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que si F_1 et F_2 sont en somme directe, alors $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ le sont aussi.
2. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^3$ et que F_1, F_2 et G sont trois plans passant par l'origine.
   Montrer qu'il peut arriver que $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ soient en somme directe,
   mais que F_1 et F_2 ne sont jamais en somme directe.
3. Si F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E, $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ sont-ils toujours supplémentaires dans G ?

Sommes directes, cas de plusieurs sous-espaces. —

Exercice 3.21 **(Reformulations de la définition).** — ★☆☆
Soient E, F, G des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) $F \cap G = \{0\} = E \cap (F + G)$.
   (ii) $E \cap F = \{0\} = (E + F) \cap G$.
   (iii) La réunion de bases de E, F et G est une famille libre.
   (iv) Tout vecteur $x \in E + F + G$ se décompose de manière unique sous la forme $x = e + f + g$, avec $e \in E, f \in F, g \in G$.

   On rappelle que la propriété (iv) signifie : « E, F et G sont en somme directe ».
2. (a) Montrer que si E, F et G sont en somme directe, alors $E \cap F = E \cap G = F \cap G = \{0\}$.
   (b) Montrer qu'on peut avoir $E \cap F = E \cap G = F \cap G = \{0\}$ sans que E, F et G soient en somme directe
   (*se placer dans* $\mathbb{R}^3$).

Exercice 3.22 **(Décomposition d'Iwasawa additive).** — ★★☆
Soit

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= \text{ l'ensemble des matrices antisymétriques de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathfrak{a} &= \text{ l'ensemble des matrices diagonales dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathfrak{n} &= \text{ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de diagonale nulle dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

1. Montrer l'égalité : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.
2. Dans cette question on suppose $n = 2$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Écrire la décomposition de M en somme d'un élément de $\mathfrak{k}$, d'un élément de $\mathfrak{a}$ et d'un élément de $\mathfrak{n}$.
3. On revient à n quelconque. Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Écrire la décomposition de M en somme d'un élément de $\mathfrak{k}$, d'un élément de $\mathfrak{a}$ et d'un élément de $\mathfrak{n}$.

Autres exercices. —

Exercice 3.23 **(Espace de suites).** — ★★☆
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suite réelles et E_{conv} l'ensemble des suites (éléments de E) convergentes, E_{const} l'ensemble des suites (éléments de E) constantes et E_0 l'ensemble des suites convergentes (éléments de E_{conv}) dont la limite est 0.

1. Montrer que E est de dimension infinie.
2. Montrer que E_{conv} et E_{const} sont des sous-espaces vectoriels de E.
3. Montrer que $E_{conv} = E_{const} \oplus E_0$.

Exercice 3.24 **(Espace de suites, II).** — ★★☆
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suite réelles ; soit E_0 l'ensemble des suites convergentes dont la limite est 0. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $F_p \subset E$ l'ensemble des suites qui sont p-périodiques, c'est à dire qui vérifient $x_{n+p} = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que E_0 et F_p sont en somme directe.
2. Montrer que F_p est de dimension finie (on donnera une base de F_p et sa dimension).
3. Montrer que $\cup_{p \in \mathbb{N}^*} F_p$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3.25 **(Intersection de deux hyperplans distincts).** — ★★☆
Soit E un espace vectoriel de dimension n et H, G deux sous-espaces de dimension $n-1$. On suppose $H \neq G$.

1. Calculer la dimension de $H \cap G$.
2. En déduire la dimension de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z + 3t = 0\}$.
3. Donner une base de F.

Exercice 3.26 **(Contrôle continu, 2013).** — ★★☆
On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 1, 0)$,$v_2 = (1, 1, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 2, 3, 4)$ et le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par $H := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y = 0\}$.

1. Déterminer les dimensions respectives de H et de $\mathbf{Vect}[v_1, v_2, v_3]$.
2. Exhiber une base de $H \cap \mathbf{Vect}[v_1, v_2, v_3]$.

Exercice 3.27 **(Contrôle continu, 2014).** — ★★☆
Rappelons que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels,

- on dit qu'elle est *arithmétique* lorsqu'il existe un réel a vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = a + x_n$,

- on dit qu'elle est *géométrique* lorsqu'il existe un réel b vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = bx_n$.

Dans cet exercice, on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des suites arithmétiques et $\mathcal{G}$ l'ensemble des suites géométriques. Ce sont des sous-ensembles de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles.

1. Les sous-ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$?
2. Déterminer $\mathcal{A} \cap \mathcal{G}$.
3. A-t-on $\mathbf{Vect}[\mathcal{A} \cup \mathcal{G}] = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$?
4. Quelle est la dimension de $\mathbf{Vect}[\mathcal{A}]$?
5. Quelle est la dimension de $\mathbf{Vect}[\mathcal{G}]$?

***Exercice 3.28* (Intersection d'hyperplans de $\mathbb{R}^n$). — ★★☆**

1. Soit E l'ensemble $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base, donner sa dimension.
2. Plus généralement, soit n un entier supérieur ou égal à 2. Si $a_1, a_2, ...a_n$ sont des nombres réels qui ne sont pas tous nuls, notons $\vec{a}$ le vecteur $(a_1, ...a_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Notons
$$H_{\vec{a}} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0\}\,.$$
   (a) Montrer que $H_{\vec{a}}$ est de dimension $(n-1)$ en donnant une base de $H_{\vec{a}}$.
   (b) Soit $\vec{u}$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence entre :
      (i) $\vec{u} \notin H_{\vec{a}}$
      (ii) $\mathbb{R}^n = H_{\vec{a}} \oplus \mathbb{R}\vec{u}$.
      Donner un exemple de vecteur $\vec{u}$ satisfaisant i. et ii.
   (c) Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
      (i) $\dim(H_{\vec{a}} \cap H_{\vec{b}}) = n - 2$
      (ii) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires.
      (iii) $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\vec{a} \oplus \mathbb{R}\vec{b} \oplus (H_{\vec{a}} \cap H_{\vec{b}})$.

CHAPITRE 4

APPLICATIONS LINÉAIRES

Définition et premiers exemples. —

***Exercice 4.1* (Vérifications de linéarité).** — ★☆☆

(a) L'application $f : (x, y, z) \mapsto x + 2y - 3z + 1$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est-elle linéaire ?
(b) L'application $g : (x, y, z) \mapsto (x + 2y - 3z, y + 5z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ est-elle linéaire ?
(c) L'application $h : (x, y, z) \mapsto x^2 + y$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est-elle linéaire ?
(d) Pour chaque α de $\mathbb{R}$, on définit une application f_α de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par $f_\alpha(x, y, z) = (x + y + z, \alpha, \alpha xy)$. Pour quelles valeurs de α l'application f_α est-elle linéaire ?
(e) L'application $\varphi : P \mapsto P' - P^2$ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ est-elle linéaire ?
(f) L'application $\varphi : P \mapsto (X^2 + 1)P'(X - 3)$ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ est-elle linéaire ?

***Exercice 4.2* (Partiel, 2016).** — ★☆☆
Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

(a) Pour $E = \mathbb{R}$, on définit $f : E \to E$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$.
(b) Pour $E = \mathbb{R}^4$, on définit $f : E \to \mathbb{R}$ par $f(x_1, \ldots, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1$.
(c) Pour $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues, on définit $\Phi : C([0, 1], \mathbb{R}) \to C([0, 1], \mathbb{R})$ par
$\Phi(f) = \left(x \mapsto \int_0^{x^2} f(y)\, dy\right)$.
(d) Pour E un espace vectoriel et p une application linéaire de E dans lui-même, on définit $f : E \to E$ par $f(x) = p(p(x))$.

Propriétés générales. —

***Exercice 4.3* (Autour des endomorphismes nilpotents).** — ★☆☆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.

1. On suppose que f est *nilpotent*, c'est-à-dire qu'une certaine puissance de f est nulle.
   On appelle *indice de nilpotence de f* le plus petit entier p vérifiant : $f^p = 0$ mais $f^{p-1} \neq 0$.
   (a) Montrer que si x est un vecteur vérifiant $f^{p-1}(x) \neq 0$, alors la famille $(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$ est une famille libre de E.
   (b) En déduire qu'on a toujours $p \leq n$, et que $f^n = 0$.

   (c) On suppose que l'indice de nilpotence de f est n. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
2. On suppose que pour tout x de E il existe $p_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{p_x}(x) = 0$. Montrer que $f^n = 0$.

***Exercice 4.4* (Un grand classique).** — ★☆☆
Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Montrer que si f vérifie la propriété suivante :

pour tout x de E, la famille $(x, f(x))$ est liée

alors f est une homothétie.

Image, noyau, théorème du rang : cas de matrices. —

Exercice 4.5. — ★☆☆

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Donner la dimension et une base de chacun des espaces $\mathrm{Ker}(T_A)$ et $\mathrm{Im}(T_A)$.

Exercice 4.6. — ★☆☆
On fixe trois réels a, b et c et on suppose qu'ils ne sont pas tous nuls. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

Donner, *sans calcul*, le rang de A, une base de $\mathrm{Im}(A)$, la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$, une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 4.7. — ★☆☆
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$ et une base de $\mathrm{Ker}(A)$, ainsi que leurs dimensions.
   Montrer l'inclusion $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Im}(A)$.
2. Calculer A^2 et vérifier que $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$. En déduire que $A^n = 0$ pour tout entier $n \geq 3$.

Exercice 4.8. — ★☆☆
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Donner une base de $\mathrm{Im}(A)$, le rang de A, et donner une ou des équations du sous-espace $\mathrm{Im}(A)$.
2. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$; en donner une base.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont en somme directe, puis qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

***Exercice 4.9* (Partiel, 2016).** — ★☆☆
On définit $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ par $f(x_1, \dots, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que f est surjective.

3. En déduire que f n'est pas injective et donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$. Donner ensuite une base du noyau de f.

***Exercice 4.10* (Commutant d'une matrice diagonale régulière). — ★★☆**
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Notons $a_{ij}, (i,j) \in \{1,..n\}^2$ ses coefficients.
On suppose que

- A est diagonale (rappelons que cela signifie$a_{ij} = 0$ si $i \neq j$),
- ses coefficients diagonaux sont deux à deux distincts ($a_{ii} \neq a_{jj}$ pour $i \neq j$).

On cherche à décrire l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AM = MA$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de R^n.

1. Soit i un entier entre 1 et n, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(A - a_{ii}I)) = 1$.
2. En déduire que si M appartient à $\mathcal{C}$ alors la famille (Me_i, e_i) est liée pour chaque i de $\{1, ..n\}$.
3. En déduire que $\mathcal{C}$ est de dimension n.

Image, noyau, théorème du rang : applications linéaires entre espaces de polynômes ou de matrices. —

***Exercice 4.11.* — ★☆☆**
Dans cet exercice, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \delta : E &\to E \\ P &\mapsto P(X-2) - P(X). \end{aligned}$$

1. Montrer que δ est linéaire.
2. Déterminer le noyau de δ.
3. Déterminer l'image de δ.

***Exercice 4.12.* — ★☆☆**
On considère la matrice $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto QM - MQ. \end{aligned}$$

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Montrer que Φ n'est pas injective.
3. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(\Phi)$.
4. Donner la dimension et une base de $\mathrm{Im}(\Phi)$.

***Exercice 4.13.* — ★☆☆**

1. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}_3[X] \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto (a+b)X^3 + (b+d)X^2 + (d+c)X + (c+a) \end{aligned}$$

   (a) Montrer que f est linéaire.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et sa dimension.

(c) Donner la dimension et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. On considère l'application

$$g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[X]$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a+b)X^3 + (b+c)X^2 + (a+c)X + (a+d)$$

(a) Montrer que g est linéaire.

(b) Montrer que g est un isomorphisme.

Image, noyau, théorème du rang : situations plus abstraites. —

Exercice 4.14. — ★☆☆

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

Montrer que $g \circ f = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E,G)}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

***Exercice 4.15* (À vérifier).** — ★★☆

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On suppose : $\mathrm{Im}(f^3) = \mathrm{Im}(f)$.

Montrer l'égalité : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4.16. — ★★☆

Soit E un espace vectoriel. Soient f, g, h des endomorphismes de E. On suppose :

$$fg = h, \quad gh = f, \quad hf = g$$

1. Montrer que f, g et h ont le même noyau (noté K) et la même image (notée I)
2. Montrer l'égalité $f^5 = f$.
3. Montrer : $E = K \oplus I$.

Exercice 4.17. — ★★☆

Soient E_1, E_2, E_3 et E_4 des espaces vectoriels. On suppose

$$\dim(E_1) = 8,\ \dim(E_2) = 5, \dim(E_3) = 7, \dim(E_4) = 6.$$

On considère des applications linéaires $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$, $f_3 \in \mathcal{L}(E_3, E_4)$ et leur composée $f = f_3 f_2 f_1$.

Montrer que $f : E_1 \to E_4$ ne peut pas être surjective.

(indication : montrer d'abord que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f_3 f_2)$. *Quelle est la dimension maximale possible pour* $\mathrm{Im}(f_3 f_2)$ *?).*

Exercice 4.18. — ★★★

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Soient $v_1, ..., v_n$ des vecteurs de E. On suppose que

- $\mathbf{Vect}[v_1, ..., v_n]$ contient $\mathrm{Ker}(f)$
- $\mathbf{Vect}[f(v_1), ..., f(v_n)]$ est égal à F.

Montrer que $(v_1, ..., v_n)$ est nécessairement une famille génératrice de E.

***Exercice 4.19* (Rang d'une somme d'endomorphismes).** — ★★★

Soient E un espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer l'inégalité $\mathbf{rg}(f+g) \leq \mathbf{rg}(f) + \mathbf{rg}(g)$.
2. **[Plus délicat]** Montrer que : $\mathbf{rg}(f+g) = \mathbf{rg}(f) + \mathbf{rg}(g)$ si et seulement si $\begin{cases} \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) & = \{0\} \\ \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) & = E \end{cases}$.

Image, noyau, théorème du rang : exemples en dimension infinie. —

Exercice 4.20. — ★☆☆
On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto (P(0), P'). \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme.
2. En déduire une démonstration du fait que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie (*vous rappelez-vous la démonstration du cours ?*).

Exercice 4.21. — ★★☆
On considère l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto P(X+1) + P(X). \end{aligned}$$

1. Montrer que Ψ est linéaire et qu'elle est injective.
2. Soit n un entier naturel. Montrer l'égalité $\Psi(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_n[X]$ (*on pourra observer l'image de la base canonique*).
3. Montrer que Ψ est surjective.

Exercice 4.22. — ★☆☆
Dans cet exercice, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi : E &\to E \\ P &\mapsto XP'(X). \end{aligned}$$

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Déterminer le noyau de Φ.
3. On note $E_0 = \{P \in E, P(0) = 0\}$.
   (a) Montrer que $\Phi(E_0) \subset E_0$.
   (b) Montrer que la restriction de Φ à E_0 est injective.
   (c) Montrer que Φ induit un automorphisme de E_0.

***Exercice 4.23* (Partiel, 2016).** — ★★☆
Si Q est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on note

$$\begin{aligned} \Phi_Q : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto P \circ Q \end{aligned}$$

Par exemple, Φ_{X^5} est l'application $P(X) \mapsto P(X^5)$.

1. Montrer que Φ_Q est linéaire.
2. (a) Donner le degré de $\Phi_Q(P)$ en fonction des degrés de P et Q notés $\deg(P), \deg(Q)$.
   (b) En déduire que si $\deg(Q) \geq 1$, alors l'application Φ_Q est injective.

3. On considère dans cette question seulement, $Q(X) = X^2$. Déterminer l'image de Φ_Q. Donner un supplémentaire de l'image de Φ_Q.
4. On suppose que Φ_Q est surjective. Montrer, en utilisant la question 2.(a) ci-dessus, que $\deg(Q) \leq 1$.
5. Déterminer l'ensemble des polynômes Q tels que Φ_Q est un isomorphisme.

***Exercice 4.24* (Intégrer et dériver). — ★★☆**
Dans cet exercice, on considère l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ et les applications

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : E &\to E \\ f &\mapsto \left(\text{la fonction } \mathcal{I}(f) : x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathcal{D} : E &\to E \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{D}$ sont linéaires.
2. Montrer que la famille $(\mathcal{I}, \mathcal{D})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker}(\mathcal{I} + \mathcal{D})$.

Projecteurs. —

***Exercice 4.25* (Remplacer une fonction par son polynôme de Taylor)**
★☆☆
Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. On considère l'application **DL** de E dans E qui, à une fonction f de E, associe la fonction $\mathbf{DL}(f) : x \mapsto f(0) + f'(0)x + \frac{f'(0)}{2}x^2$.
   Montrer que **DL** est un projecteur.
2. On considère les sous-espaces
   $$F = \left\{f \in E, \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c\right\}$$
   $$G = \left\{f \in E, \exists \varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2\varepsilon(x)\right\}$$
   Montrer que **DL** est la projection sur F parallèlement à G.

***Exercice 4.26* (Partie paire). — ★☆☆**
Soit $E = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère l'application $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(f)(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$.

1. Montrer que φ est un projecteur.
2. On considère la restriction de φ à $\mathbb{R}_{2n}[X]$ pour un entier $n \geq 1$. Cette restriction est notée $\varphi_{|\mathbb{R}_{2n}[X]}$.
   Donner une base du noyau et une base de l'image de $\varphi_{|\mathbb{R}_{2n}[X]}$.

***Exercice 4.27* (Division euclidienne). — ★☆☆**
Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et A un polynôme de degré $d > 1$.
On considère l'application $\rho : E \to E$ qui, à un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, associe le reste de la division euclidienne de P par A. Montrer que ρ est un projecteur ; préciser $\operatorname{Im}(\rho)$ et $\operatorname{Ker}(\rho)$.

***Exercice 4.28* (Un jeu abstrait avec les projecteurs). — ★★☆**
Soit E un espace vectoriel et p, q des projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $pq = -qp$.
2. En déduire que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $pq = qp = 0$
   (*on pourra montrer que si* $x \in \operatorname{Ker}(p)$ *alors* $pq(x) = 0$ *puis qu'on a aussi* $pq(x) = 0$ *si* $x \in \operatorname{Im}(p)$).

***Exercice 4.29* (Un jeu abstrait avec les projecteurs, II). — ★★☆**
Soit E un espace vectoriel et p, q des projecteurs de E.

1. Montrer que $p-q$ est un projecteur si et seulement si $pq = qp = q$.
2. Montrer que $p-q$ est un projecteur si et seulement si $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$.
3. On suppose que $p-q$ est un projecteur. Montrer les égalités $\mathrm{Im}(p-q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p-q) = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

Formes linéaires et hyperplans. —

Exercice 4.30 **(Endomorphismes de rang 1).** — ★☆☆

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) L'endomorphisme f est de rang 1 ;
   (ii) il existe une forme linéaire non nulle φ sur E et un vecteur non nul u de E vérifiant : $\forall x \in E$, $f(x) = \varphi(x)u$.
2. Dans la situation (ii) ci-dessus, montrer que f est un projecteur si et seulement si $\varphi(u) = 1$.
3. En déduire que pour chaque vecteur non nul u de E, il existe un projecteur p de rang 1 vérifiant $\mathrm{Im}(p) = \mathbf{Vect}[u]$.

Exercice 4.31 **(Polynômes de Lagrange et base duale).** — ★☆☆
Dans cet exercice, on fixe un entier $n \geq 2$ et on se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit $\mathcal{B} = (1, X, .., X^n)$ la base canonique de E. Déterminer la base $\mathcal{B}^\star$ de $E^\star$ qui est la base duale de $\mathcal{B}$.
2. On considère $n+1$ réels $a_0, a_1, ..., a_n$, supposés deux à deux distincts.
   (a) Pour chaque i de $\{0, .., n\}$, on note φ_i l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à un polynôme P associe le réel $P(a_i)$.
   Montrer que $(\varphi_0, \varphi_1, .., \varphi_n)$ est une base de $E^\star$ en montrant que c'est la base duale de la base $(L_0, ..., L_n)$ définie à l'exercice 11 de la feuille de TD numéro 2.
   (b) On suppose que tous les a_i sont dans l'intervalle $[0, 1]$. Déduire de (a) qu'il existe des réels $\lambda_0, ..., \lambda_n$ vérifiant :
   $$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \ \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i).$$

Exercice 4.32 **(Formes linéaires ne distinguant pas AB et BA).** — ★☆☆
Dans cet exercice, on se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$.

Pour chaque (i, j) de $\{1, .., n\}^2$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1. Par exemple, si $n = 3$, E_{11} est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, E_{23} est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour chaque (i, j) de $\{1, .., n\}^2$ vérifiant $i \neq j$, on a
   $$E_{ij}E_{ji} = E_{ii}, \qquad E_{ij}E_{jj} = E_{ij} \quad \text{ et } E_{jj}E_{ij} = 0$$
2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que φ vérifie la propriété :
   $$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \ \varphi(AB) = \varphi(BA).$$
   On se propose de montrer que φ est proportionnelle à la forme linéaire $A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$.
   (a) Montrer, en utilisant la question 1, que $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$ pour tous i, j entre 1 et n.
   (b) Montrer que $\varphi(E_{ij}) = 0$ pour tout (i, j) de $\{1, .., n\}^2$ vérifiant $i \neq j$.
   (c) On note λ le scalaire $\varphi(E_{11})$. Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\varphi(A) = \lambda\mathrm{Tr}(A)$.

3. Soit u un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que
   - $u(I_n) = I_n$;
   - pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $u(AB) = u(BA)$.

   Montrer que pour toute A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices A et $u(A)$ ont la même trace.

***Exercice 4.33* (Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).** — ★☆☆
Dans cet exercice, on fixe un entier $n \geq 1$ et on se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour chaque matrice B de E, on note $\Theta(B)$ la forme linéaire

$$A \mapsto \mathrm{Tr}(BA)$$

sur E. L'application Θ associe donc à chaque matrice B de E un élément du dual $E^\star$ de E.

1. Montrer que $\Theta : E \to E^\star$ est linéaire, puis qu'elle est injective.
2. En déduire que si φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une unique matrice B de E vérifiant
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(A) = \mathrm{Tr}(BA)$$
3. (a) Montrer que si B est une matrice diagonale et si A est une matrice de diagonale nulle, alors $\mathrm{Tr}(BA) = 0$.
   (b) Soit $B = (b_{ij})$ est une matrice qui n'est pas diagonale : il existe donc un couple (i_0, j_0) avec $i_0 \neq j_0$ pour lequel $b_{i_0 j_0} \neq 0$. On considère la matrice élémentaire $E_{i_0 j_0}$ (voir l'énoncé de l'exercice précédent).
   Montrer qu'il existe un réel α tel que la trace $\mathrm{Tr}\left[B(I_n + \alpha E_{i_0 j_0})\right]$ soit nulle.
4. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déduire de ce qui précède que H contient au moins une matrice inversible.

Problèmes d'entraînement. —

Exercice 4.34. — ★☆☆
Dans cet exercice, on se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(P) = P' + P''$ avec P' le polynôme dérivé de P et P'' le polynôme dérivé de P'. On fixe un polynôme Q de E vérifiant $\int_0^1 Q(x)\,dx = 0$.

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Montrer que $\varphi^3 = 0$.
3. Donner une base du noyau et une base de l'image de φ.
4. Soit $\psi : E \mapsto E$ définie par $\psi(P) = (\int_0^1 P(x)\,dx)Q$. Montrer que ψ est linéaire et que $\psi^2 = 0$.
5. Donner une base du noyau et une base de l'image de ψ.
6. Montrer que $F = \{p \in L(\mathbb{R}^n) \,|\, p \circ p(x) = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

***Exercice 4.35* (Partiel, 2015).** — ★☆☆
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On suppose l'égalité : $f^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Rappeler l'énoncé du théorème du rang (on ne donnera pas de preuve).
2. Montrer que f est injective et en déduire que f est surjective.
3. Montrer que la famille $\{x, f(x)\}$ est libre dès que $x \neq 0$.
4. Soit $y \notin \mathbf{Vect}[x, f(x)]$. Montrer que la famille $\{x, f(x), y, f(y)\}$ est libre.
5. En déduire que la dimension de E est paire (*on pourra chercher à construire une base de E composée de couples du type* $(x, f(x))$).

Exercice 4.36. — ★☆☆
Soit E un espace vectoriel.

1. Soit f un endomorphisme de E. Considérons un endomorphisme p de E vérifiant
   - p est un projecteur de rang 1 ;
   - $f \circ p = p \circ f$.

   Montrer que si u appartient à $\mathrm{Im}(p)$, alors la famille $(u, f(u))$ est liée.

2. On note Z le sous-ensemble suivant de $\mathcal{L}(E)$:
$$Z = \{f \in \mathcal{L}(E), \quad \forall g \in \mathcal{L}(E), \quad fg = gf\}.$$
   Montrer que f appartient à Z si et seulement si f est une homothétie de E (*utiliser l'exercice 4.4 et la question 1*).

***Exercice 4.37* (Un problème avec des formes linéaires).** — ★☆☆
Soit E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E.
On cherche à déterminer une condition sur f pour qu'il existe un vecteur u de E vérifiant :

pour tout x de E, la famille $(u, x, f(x))$ est liée

1. Montrer que c'est toujours le cas si E est de dimension 2.

2. On suppose maintenant que E est de dimension au moins 3 : il existe ainsi deux vecteurs v et w tels que (u, v, w) soit libre.
   On veut montrer que f est de la forme $x \mapsto \alpha x + \varphi(x)v$ pour un certain réel α et une certaine forme linéaire $\varphi \in E^\star$.
   (a) Montrer que si x est un vecteur de E n'appartenant pas à $\mathbf{Vect}[u]$, il existe deux scalaires λ_x et μ_x tels que
$$f(x) = \lambda_x u + \mu_x x.$$
   (b) Montrer que si x est un vecteur de E n'appartenant pas à $\mathbf{Vect}[u, v]$, alors $\mu_x = \mu_v$ (*observer l'image de $x + v$*).
   (c) Montrer que si x appartient à $\mathbf{Vect}[u, v]$ mais pas à $\mathbf{Vect}[u]$, alors $\mu_x = \mu_w$.
   (d) Déduire de ce qui précède que pour tout x de E, on a : $f(x) - \mu_v x \in \mathbf{Vect}[u]$.
   (e) En conclure qu'il existe une forme linéaire φ sur E vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \mu_v x + \varphi(x)u.$$

***Exercice 4.38* (Un long problème).** — ★★☆
Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère les endomorphismes T et F de E définis par
$$\Theta(P) = P(X+1) \text{ et } \Phi(P) = P(X+1) - P(X)$$
pour chaque P de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. (a) Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$ et d son degré. Montrer que $\Phi(p)$ est de degré $d-1$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$; préciser un supplémentaire de $\mathrm{Im}(\Phi)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Déduire également de la question (a) une description de $\mathrm{Ker}(\Phi)$. Est-ce que $\mathrm{Im}(\Phi)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi)$ sont supplémentaires ?
2. Soit P un élément de E vérifiant : $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.
   (a) En étudiant $P(0)$, $P(1)$ et $P(-2)$, justifier l'existence d'un polynôme Q tel que $P = X(X+1)(X+2)Q$. Montrer que Q appartient à $\mathrm{Ker}(\Phi)$.
   (b) Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_n[X], \quad (X+3)P(X) = XP(X+1)\}$ est une droite vectorielle.
3. (a) Soit i un entier naturel quelconque. Expliciter l'endomorphisme Θ^i.

(b) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\Phi^k(P) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} P(X+i)$$

(utiliser le fait que $\Phi = \Theta + \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ et développer Φ^k dans l'espace des endomorphismes).

(c) Montrer que Φ est nilpotent (*observer* Φ^k *pour* $k > n$).

4. (a) On pose $C_0 = 1$ et pour tout p de $\{1, .., n\}$, on définit le polynôme $C_p(X) = \frac{1}{p!} X(X-1)...(X-p+1)$.

(b) Montrer que pour tout p de $\{1, ..., n\}$, on a $\Phi(C_p) = C_{p-1}$: on pourra poser $D_p = \Phi(C_p)$ et observer les valeurs $D_p(k)$ et $C_{p-1}(k)$ pour k entier supérieur ou égal à p.
En déduire la valeur de $f^k(C_p)$ pour tout entier naturel k.

(c) Montrer que $(C_p)_{p=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

(d) Soit M un élément de E. On suppose que les coefficients de M sont tous rationnels. Justifier l'existence d'une famille $(\lambda_p)_{p=0..n}$ de nombres réels vérifiant

$$M = \sum_{p=0}^{n} \lambda_p C_p.$$

Pour tout k de $\{0, .., n\}$, notons $N_k = \Phi^k(M)$; montrer que $\lambda_k = N_k(0)$.

(e) En déduire que si M est à coefficients *entiers*, alors tous les λ_k, $k \in \{0, ..., n\}$, sont entiers.

CHAPITRE 5

REPRÉSENTATION MATRICIELLE DES APPLICATIONS LINÉAIRES

Définition et premières manipulations. —

Exercice 5.1. — ★☆☆

Dans chacune des questions ci-dessous, on donne un espace vectoriel E, une base $\mathcal{B}$ de E, un espace vectoriel F, une base $\mathcal{C}$ de F, et une application linéaire f de E dans F.

Écrire dans chaque cas la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{CB}}(f)$.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ = la base canonique, $F = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ = la base canonique, $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x)$.
2. $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ = la base canonique, $F = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{C} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$, $f : (x, y) \mapsto (x+y, x-y, 2x)$.
3. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, $F = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$, $f : P \mapsto (X - 1)P(X + 1)$.
4. $E = F = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (1, X + 1, 2X^2 + 4X + 3)$, $f : P \mapsto (X + 2)P'(X) + P(X - 1)$
5. $E = \mathbb{R}_n[X]$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$, $\mathcal{B} = (1, X, .., X^n)$, $F = E$, $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, $f : P \mapsto (X^2 - 1)P''$.

Exercice 5.2. — ★☆☆

1. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f l'endomorphisme $P \mapsto P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$ de E.
   (a) Écrire la matrice de f dans la base canonique.
   (b) En déduire des descriptions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Soient a, b, c trois réels. Écrire une expression de $f(aX^2 + bX + c)$.
   (b) En déduire des descriptions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Est-il surjectif ?

Quelques manipulations plus abstraites. —

Exercice 5.3. — ★☆☆
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $(e_1, .., e_n)$ une base de E. On note v le vecteur $e_1+...+e_n$ et f l'endomorphisme de E défini par : $\forall i \in \{1, .., n\}$, $f(e_i) = e_i + v$.

1. Montrer que tout vecteur de $\mathrm{Ker}(f)$ est colinéaire à v, et en fait, nul.
2. Montrer que f est un isomorphisme.
3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 5.4. — ★☆☆
Soit A une matrice 2×2 vérifiant : $A^2 = -I$.

1. Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Montrer que (u, Au) est une base de $\mathbb{R}^2$. Ecrire la matrice de T_A dans cette base.
2. En s'appuyant sur la question précédente, donner une interprétation géométrique de la matrice A.

Exercice 5.5. — ★☆☆

Soit n un entier naturel non nul et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.
On a déjà montré dans un TD précédent que si x est un vecteur vérifiant $u^{n-1}(x) \neq 0$, alors $\mathcal{B} = \big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

1. Écrire la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.
2. Dans cette question, on suppose $n = 5$. Calculer les matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^k)$ pour $k \in \{1, .., 5\}$.
   En déduire $\mathbf{rg}(u^k)$ pour $k \in \{1, .., 5\}$.

Exercice 5.6. — ★☆☆
Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^2 = 0$.

1. Que peut-on dire sur le rang r de A ?
2. (a) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dont les r premiers vecteurs forment une base de $\mathrm{Im}(A)$.
   (b) Montrer que la matrice de A dans cette base est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux tous nuls.

Exercices divers. —

***Exercice 5.7* (Contrôle continu, 2015).** — ★☆☆
On note $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$\varphi(P) = (P(0), P'(0), P(1), P'(1)).$$

1. Montrer que φ est une application linéaire bijective.
2. Soit $\mathcal{B}$ la base $(1, X, X^2, X^3)$ de E et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Écrire la matrice de φ.
3. Soit λ un nombre réel. Déterminer le polynôme $P \in E$ tel que $P(0) = P(1) = 0$ et $P'(0) = P'(1) = \lambda$.
4. Trouver une base $\mathcal{U}$ de E vérifiant : $\mathcal{M}_{\mathcal{CU}}(\varphi) = I_4$. Y a-t-il d'autres bases ayant cette propriété ?

Exercice 5.8. — ★☆☆
Soit E le sous-espace vectoriel $\mathbf{Vect}[\cos, \sin, \cosh, \sinh]$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Vérifier que $\mathcal{B} = (\cos, \sin, \cosh, \sinh)$ est une base de E.
2. Montrer que si f est un élément de E, alors f est dérivable et f' appartient à E. On note D l'application qui, à un élément f de E, associe l'élément f' de E. Ecrire la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(D)$.
3. Montrer que D est un automorphisme de E et déterminer, sans calcul, la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(D^{-1})$.

Exercice 5.9. — ★☆☆
Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe aucune matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{$\star$}$$

1. Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Im}(A^2) \subset \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$.
2. Montrer que si M est une matrice vérifiant $(\star)$, alors $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(M^2)$ et $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Im}(M^2)$.
3. En déduire que si M vérifie $(\star)$, alors la première colonne et la dernière ligne de M sont nulles.
4. Conclure.

Exercice 5.10. — ★☆☆
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto AM - MA. \end{aligned}$$

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Existe-t-il des matrices A pour lesquelles Φ est injective ? Existe-t-il des matrices A pour lesquelles Φ est surjective ?
3. Dans cette question, on suppose $n = 2$, et on suppose $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ où a est un réel fixé. Rappeler qui sont les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis écrire la matrice de Φ dans cette base.

Exercice 5.11. — ★★☆
Trouver une matrice B vérifiant

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

On pourra chercher une matrice B triangulaire et utiliser le fait que les colonnes de B donnent les images par T_B des vecteurs de la base canonique.

Changement de base. —

Exercice 5.12. — ★☆☆
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On définit trois vecteurs v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{aligned} v_1 &= 2e_1 - 4e_2 + e_3 \\ v_2 &= -e_1 \\ v_3 &= e_2 - 2e_1 . \end{aligned}$$

On note $\mathcal{V}$ la famille (v_1, v_2, v_3). C'est une base de $\mathbb{R}^3$ (pourquoi ?).
On considère un endomorphisme u défini par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Écrire la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(u)$ de u dans la base $\mathcal{V}$.

Exercice 5.13. — ★☆☆
Soient e_1, e_2, e_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On note T l'application linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. (a) Décrire le noyau de T.
   (b) Donner la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$. On la note A.
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
   (a) Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
   (b) Ecrire la matrice de T dans la base (f_1, f_2, f_3). On la note B.
3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation relie A, B, P et P^{-1} ?

***Exercice 5.14* (Forme normale des matrices de rang r).** — ★☆☆
Soit n un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit r un entier de $\{0, .., n\}$ et J_r la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les r premiers coefficients diagonaux valent 1 et les $(n - r)$ autres valent 0. Par exemple, si $n = 3$, $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Le but de cet exercice est de montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est de rang r ;
(ii) Il existe deux matrices inversibles P et Q vérifiant : $A = P \cdot J_r \cdot Q$

1. Dans cette question on suppose que A est de rang r.
   (a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ dont les $(n-r)$ derniers vecteurs forment une base du noyau (pourquoi une telle base existe-t-elle) ?. Montrer que $(f(e_1), .., f(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Soit $\mathcal{C}$ une base de $\mathbb{R}^n$ dont les r premiers vecteurs sont $f(e_1), .., f(e_r)$. Montrer l'égalité $\mathcal{M}_{\mathcal{CB}}(f) = J_r$.
   (c) En déduire que (i) implique (ii).
2. Montrer que (ii) implique (i)
   (*indication : si E est un espace vectoriel, f est un endomorphisme de E et A est une partie de E, on a $f(\textbf{Vect}[A]) = \textbf{Vect}[f(A)]$.*)

Matrices semblables. —

Exercice 5.15. — ★☆☆
Montrer que les matrices $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont semblables. Sont elles semblables à $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$? À $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

Exercice 5.16. — ★☆☆
Soit A une matrice 2×2 vérifiant $A^2 = 0$.
Montrer que, ou bien $A = 0$, ou bien A est semblable à la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 5.17. — ★☆☆
Soient a et b deux nombres réels. On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & b & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique et B dans une autre base ?
Même question si

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.18. — ★★☆
Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

***Exercice 5.19* (Trace d'un endomorphisme abstrait).** — ★★☆
Les questions 2 et 3 utilisent la question 1, mais n'ont pas de lien entre elles.

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
   Montrer que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors les matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ ont la même trace.
   Le nombre $\mathbf{Tr}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\right)$ ne dépend donc que de f, et pas de la base $\mathcal{B}$: on l'appelle « trace de f », on le note $\mathbf{Tr}(f)$.
2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E.
   (a) Soit $(e_1, .., e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et $(u_1, .., u_r)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$.
   Dire pourquoi $\mathcal{B} = (e_1, .., e_p, u_1, .., u_r)$ est une base de E. Écrire la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)$.
   (b) En déduire l'égalité $\mathrm{Tr}(p) = \mathbf{rg}(p)$.
3. Dans cette question, on se place dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Soit u l'endomorphisme $M \mapsto M^T$ de E. Déterminer $\mathbf{Tr}(u)$.
   (b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et φ_A l'endomorphisme $M \mapsto AM$ de E. Déterminer $\mathbf{Tr}(\varphi_A)$.

CHAPITRE 6

DÉTERMINANT

Exercice 6.1. — ★☆☆
Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercice 6.2. — ★☆☆
Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} (a, b, c \text{ réels fixés})$$

Exercice 6.3. — ★☆☆
Soient x, y et z des réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} yz \\ z \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ xz \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ x \\ xy \end{pmatrix} \right)$$

soit libre dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6.4. — ★☆☆
On fixe des réels a, b, c, x et un entier n de $\mathbb{N}^\star$. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & n & . & . & . & n \\ n & 2 & n & . & . & n \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ n & . & . & . & . & n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 0 & 1 & . & . & 1 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1+x & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & . & . & 1 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 & 1+x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & . & . & 1 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 1 \\ 1 & . & & . & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & . & a_n \\ -x & x & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -x & x & 0 & & . \\ . & & . & . & & . \\ . & & & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & -x & x \end{vmatrix}$$

***Exercice 6.5* (Déterminant de Vandermonde). — ★☆☆**

1. Soient a, b et c trois réels. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.
2. Soient $a_1, .., a_n$ des réels. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

***Exercice 6.6* (Déterminant circulant). — ★★☆**

1. Soient a, b, c trois réels. Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
   (a) Montrer que $\mathbf{Det}(J) \neq 0$.
   (b) Calculer le produit AJ et en déduire le déterminant de A.
2. Soient $a_1, .., a_n$ des nombres réels et A la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$ (on parle de *matrice circulante*).
   En s'appuyant sur la matrice $J = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, calculer le déterminant de A.

***Exercice 6.7.* — ★☆☆**

On note a, b, c des réels. Calculer les déterminants suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

***Exercice 6.8.* — ★★☆**

1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer qu'il y a équivalence entre
   (i) Il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $A^2 = -Id$;
   (ii) L'entier n est pair.
2. Une matrice antisymétrique peut-elle être inversible ?
3. Existe-t-il une matrice carrée A à coefficients réels telle que ${}^tA \cdot A = -Id$?
   (on pourra par exemple considérer le coefficient en haut à gauche).

***Exercice 6.9.* — ★★☆**

1. Soient A et B deux matrices $n \times n$.

(a) Montrer que la fonction $P : x \mapsto \mathbf{Det}(A + xB)$ est polynomiale de degré au plus n.
(b) Montrer que le coefficient de X^n dans P est $\mathbf{Det}(B)$.
En déduire que P est de degré n si et seulement si B est inversible.

2. Soit A une matrice $n \times n$ non inversible. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour tout t de $]0, \varepsilon[$, la matrice $A + t \cdot I_n$ est inversible.
3. Montrer que toute matrice peut s'écrire comme somme de deux matrices inversibles.

***Exercice 6.10* (D'après l'examen 2013).** — ★★☆

1. Donner des exemples de matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathbf{Det}(A + B) \neq \mathbf{Det}(A) + \mathbf{Det}(B)$.
2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'on a
$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathbf{Det}(A + B) = \mathbf{Det}(A) + \mathbf{Det}(B),$$
(a) Que dire du cas $n = 1$?
(b) On suppose dans la suite $n \geq 2$.
En calculant $\det(kA)$ avec $k \in \mathbb{N}$, montrer que A n'est pas inversible.
(c) ★★★ Montrer qu'il existe une matrice M non-inversible telle que $A + M$ soit inversible.
(d) En déduire que A est la matrice nulle.

Exercice 6.11. — ★☆☆

1. Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.
Calculer (en fonction de $\det(A)$ et $\det(B)$) le déterminant de la matrice
$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$. (On pourra pour cela décomposer M comme produit de deux matrices de déterminant « facile à calculer » et utiliser la multiplicativité du déterminant.)
2. Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$. (On pourra généraliser la méthode de 1.)

Exercice 6.12. — ★☆☆

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On se place dans $\mathbb{R}^n$. On note e_i le i-ème vecteur de la base canonique $\mathbb{R}^n$ (c'est le vecteur dont la i-ème composante est égale à 1 et toutes les autres sont nulles).

1. Écrire la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes C_j sont donnés par
$$\begin{cases} C_j = e_j + e_n \text{ pour } 1 \leq j \leq n-1 \\ \text{et } C_n = e_1 + e_2 + \ldots + e_n. \end{cases}$$
2. Calculer $\mathbf{Det}(M)$ (on commencera par étudier les cas $n = 3$, $n = 4$, avant de traiter le cas général).

Exercice 6.13. — ★☆☆

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (2, 1, 3)$ et $e_3 = (1, 2, 2)$.

1. Quel est le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs e_1, e_2 et e_3 ? :
2. Considérons maintenant la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Quel est le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs Ae_1, Ae_2, Ae_3 ?

Exercice 6.14. — ★☆☆
Étant donnés des paramètres réels a, b et c, trouver les réels x qui vérifient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 6.15. — ★☆☆
Soit n un entier naturel non nul et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1. Montrer que $\mathbf{Det}(M)$ est un entier et qu'il est divisible par 2^{n-1}.

Exercice 6.16. — ★★☆
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer le déterminant de la comatrice $\mathbf{Com}(A)$ en fonction de $\mathbf{Det}(A)$.
2. Etudier le rang de la comatrice $\mathbf{Com}(A)$ en fonction de celui de A.

CHAPITRE 7

VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

Valeurs propres et vecteurs propres : premières manipulations. —

Exercice 7.1. — ★☆☆
Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondants.
En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 7.2. — ★☆☆
Soit A une matrice carrée à coefficients réels.

1. Exprimer les polynômes caractéristiques et les spectres des matrices $-A$, $2A$, A^T, A^2, $A+kI$ $(k \in \mathbb{R})$ en fonction de ceux de A.
2. À quelle condition sur ses valeurs propres la matrice A est-elle inversible ? Si c'est le cas, quelles sont les valeurs propres de A^{-1} ?

Exercice 7.3. — ★☆☆
Soit A une matrice 2×2 *symétrique*, c'est-à-dire de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ avec a, b, c réels.

1. Montrer qu'il existe deux réels λ_1, λ_2 (éventuellement confondus) vérifiant : $\chi_A(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$.
2. Vérifier que si $\lambda_1 = \lambda_2$ si et seulement s'il existe un réel k vérifiant $A = kI_2$.
3. En déduire que A est toujours diagonalisable.

Exercice 7.4. — ★☆☆
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

On suppose que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre 3

et que $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre $\frac{1}{2}$.

1. Dire pourquoi f est diagonalisable.
2. Soit $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ le disque unité centré à l'origine. Dessiner $f(D)$.

Diagonalisation : entraînement sur des matrices 3×3. —

Exercice 7.5. — ★☆☆
On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A est diagonalisable et donner une base de diagonalisation de A.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7.6 **(Examen 2016).** — ★☆☆
On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de M.
2. Déterminer les sous espaces propres de M.
3. Montrer que la matrice M est semblable à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.7 **(Examen 2015).** — ★☆☆
On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.
Calculer le polynôme caractéristique de M.

1. Montrer que la matrice M est diagonalisable.
2. Donner une base de vecteurs propres.
3. Calculer M^n pour $n \geq 2$.

Exercice 7.8 **(Examen 2014).** — ★☆☆
On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donner les valeurs propres de M. Est-elle diagonalisable ?

Exercice 7.9 **(Examen 2013).** — ★☆☆

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Donner une base de diagonalisation de A.
   Dans la question suivante, on notera $\mathcal{D}$ cette base et $\mathcal{B}$ la base canonique.
3. Donner l'expression des matrices de passage $P_{\mathcal{B} \text{ vers } \mathcal{D}}$ et $P_{\mathcal{D} \text{ vers } \mathcal{B}}$.
4. Calculer A^i pour $i \in \mathbb{N}^\star$.

Autres exercices avec des matrices. —

Exercice 7.10. — ★☆☆

Dans cet exercice, on fixe un réel x et on considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1+x & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & . & . & 1 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 & 1+x \end{bmatrix}$ de taille n.

1. Montrer que x est valeur propre de A. Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?
2. Montrer, sans calculer le polynôme caractéristique de A, que A est diagonalisable.

Exercice 7.11. — ★☆☆
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n impair.

1. Montrer que A admet au moins une valeur propre.
2. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui ait une seule valeur propre et ne soit pas diagonalisable.
3. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui ait deux valeurs propres distinctes et ne soit pas diagonalisable.

Exercice 7.12. — ★☆☆
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$.

***Exercice 7.13* (Révisions).** — ★☆☆
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. Tout projecteur de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable.
2. Deux matrices semblables ont les mêmes sous-espaces propres.
3. Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
4. Toute matrice inversible est diagonalisable.

Diagonalisation d'endomorphismes d'autres espaces. —

Exercice 7.14. — ★☆☆

Soit A la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. On note Φ l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto AM. \end{aligned}$$

1. Écrire la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs propres de Φ.
3. Dire si Φ est diagonalisable.

Exercice 7.15. — ★☆☆
Si P est un polynôme à coefficients réels, on appelle $f(P)$ le polynôme $(X+1)P'(X) + P(X)$

1. Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Montrer que dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, l'endomorphisme f a pour matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Quel est le polynôme caractéristique de f ?
4. Montrer que f est diagonalisable et donner une base de $\mathbb{R}_3[X]$ formée de vecteurs propres de f.
5. Déterminer une matrice P inversible de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant $M = PDP^{-1}$.
6. Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}^\star$
7. Que vaut le déterminant de f ? Montrer que f est inversible.
8. Déterminer la matrice de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ (on pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton).

***Exercice 7.16* (Examen 2016). — ★★☆**

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On considère deux vecteurs propres X et Y de la matrice transposée A^T, associés respectivement aux valeurs propres λ et μ.

On notera $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres d'une matrice M, et χ_M son polynôme caractéristique.

Partie I

1. En assimilant X et Y à des matrices à une seule colonne et n lignes, on note $B = YX^T$: c'est une matrice $n \times n$.
   (a) Quel est le rang de B ?
   (b) Calculer $BA + A^T B$.
   (c) Montrer que si $Sp(A) \cap Sp(-A)$ est non vide, alors il existe une matrice B non nulle telle que $BA + A^T B = 0$.
2. Rappelons que si $P = a_0 + a_1 X + ... + a_d X^d$ est un polynôme, on note $P(A)$ la matrice $a_0 I_n + a_1 A + ... + a_n A^n$.
   (a) Soit A une matrice triangulaire supérieure. Quel est son polynôme caractéristique χ_A ?
   (b) On suppose que A est une matrice triangulaire supérieure et que $Sp(A) \cap Sp(-A)$ est vide. Montrer que la matrice $\chi_A(-A^T)$ est inversible.
   (c) En déduire que si A est une matrice à coefficients complexes *quelconque* telle que $Sp(A) \cap Sp(-A)$ est vide, alors $\chi_A(-A^T)$ est inversible.

Partie II

On définit une application de $M_n(\mathbb{C})$ dans lui-même par

$$\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{C})$$
$$M \mapsto MA + A^T M.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(B) = 0$.
   (a) Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on a
   $$BP(A) = P(-A^T).B$$
   (b) On rappelle que $\chi_A(A) = 0$. En déduire que si $Sp(A) \cap Sp(-A)$ est vide, alors $B = 0$.
3. Déduire de ce qui précède une condition nécessaire et suffisante sur A pour que Φ soit un isomorphisme.

Exercices plus théoriques. —

Exercice 7.17. — ★☆☆
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit f un endomorphisme nilpotent de E : il existe un entier p de $\mathbb{N}$ vérifiant $f^p = 0$.
   (a) Montrer que le déterminant de f est nul.
   (b) Montrer que la seule valeur propre de f est 0.
   (c) En déduire que le polynôme caractéristique de f est X^n.
   (d) Montrer que si u est un endomorphisme de E et si le polynôme caractéristique de u est X^n, alors u est nilpotent.
2. Soient f et g deux endomorphismes de E.
   On suppose que f est nilpotent, que g est diagonalisable et que $g + f = 0$.
   Vérifier que $g = 0$ puis que $f = 0$.

Exercice 7.18. — ★☆☆
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Le but de cet exercice est de montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) f est diagonalisable ;
(ii) il existe un polynôme P qui est *scindé à racines simples* et qui vérifie $P(f) = 0$.

1. Dans cette question, on suppose que f est diagonalisable. On note $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres de f. Montrer l'égalité
$$(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ ... \circ (f - \lambda_k \mathrm{id}_E) = 0$$
   (on pourra considérer la matrice de $(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ ... \circ (f - \lambda_k \mathrm{id}_E)$ dans une base de diagonalisation de f).
2. Dans cette question, on suppose qu'il existe deux réels λ, μ distincts vérifiant :
   $(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_E) \circ (f - \mu \cdot \mathrm{id}_E)$ est non injectif.
   (a) Rappeler pourquoi $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_E)$ et $E_\mu = \mathrm{Ker}(f - \mu \cdot \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe.
   (b) On suppose que ces deux espaces sont non réduits à $\{0\}$.
   En utilisant le théorème du rang sur $f - \lambda_1 id$, montrer que $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}\left((f - \lambda_1 id) \circ (f - \lambda_2 id)\right)$.
3. En s'appuyant sur la question précédente, montrer que :
   si λ_1, .., λ_k sont des réels deux à deux distincts et si $\prod_{i=1}^{k} (f - \lambda_i \mathrm{id}) = 0$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}$.
4. Conclure : démontrer l'équivalence entre (i) et (ii).

Exercice 7.19. — ★☆☆
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Soit V un sous-espace vectoriel de E. On suppose que V est stable par f, c'est-à-dire que $f(V) \subset V$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de $f_{|V}$ divise celui de f.
2. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que si f est diagonalisable, alors $f_{|V}$ est diagonalisable.

Exercice 7.20. — ★☆☆
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E.

1. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(f)$ et $\mathcal{M}_\mathcal{B}(g)$ soient diagonales. Montrer l'égalité $gf = fg$.
2. Dans cette question on suppose l'égalité $gf = fg$.
   (a) Montrer que pour tout λ de $\mathbf{Spectre}(f)$, on a $g(E_\lambda) \subset E_\lambda$,
   où E_λ est l'espace propre de f pour la valeur propre λ.

(b) On suppose de plus que f est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes distinctes. Montrer que g est diagonalisable et qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)$ soient toutes les deux diagonales.

(c) On suppose maintenant seulement que f et g sont diagonalisables. En utilisant le résultat de l'exercice précédent et la question (a), montrer que g est diagonalisable et qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)$ soient toutes les deux diagonales.